

Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$

(πρόκειται για ένα άθροισμα 2024 όρων που προκύπτει θέτοντας διαδοχικά όπου $k = 1, 2, \dots, 2023, 2024$)

Λύση

Για κάθε k ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} &= \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} (\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \end{aligned}$$

Όστε το αρχικό άθροισμα γίνεται (θέτοντας διαδοχικά όπου $k = 1, 2, \dots, 2023, 2024$)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2023}} - \frac{1}{\sqrt{2024}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45} \end{aligned}$$

[Τζιατζιάφης Γιώργος Β3]