

## Άσκηση - Νοέμβριος 2012

Κάθε σημείο του επιπέδου το χρωματίζουμε **κόκκινο** ή **πράσινο**. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο, οι κορυφές του οποίου έχουν το ίδιο χρώμα .

### Λύση

Αν όλα τα σημεία του επιπέδου έχουν το ίδιο χρώμα, το θέμα λήγει. Το ακριβώς αντίθετο είναι να υπάρχει τουλάχιστον ένα τμήμα με άκρα διαφορετικού χρώματος.

Θεωρούμε λοιπόν αυτό το τμήμα και παίρνουμε το μέσο του. Από τα 3 σημεία, τα 2 θα έχουν το ίδιο χρώμα, έστω ΚΚ .

Κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά το τμήμα ΚΚ.

Αν ένα από τα νέα σημεία (οι τρίτες κορυφές των ισοπλεύρων) έχουν χρώμα Κ, το θέμα λήγει.

Στην αντίθετη περίπτωση θα είναι και τα δύο νέα σημεία χρώματος Π, οπότε σ' αυτή τη περίπτωση το τρίγωνο με τα διακεκομμένα τμήματα εύκολα διαπιστώνουμε (π.χ. υπολογίζοντας τα μήκη των πλευρών του, αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό τμήμα έχει μήκος  $2a$ ) ότι είναι ισόπλευρο, οπότε και πάλι το θέμα λήγει.

