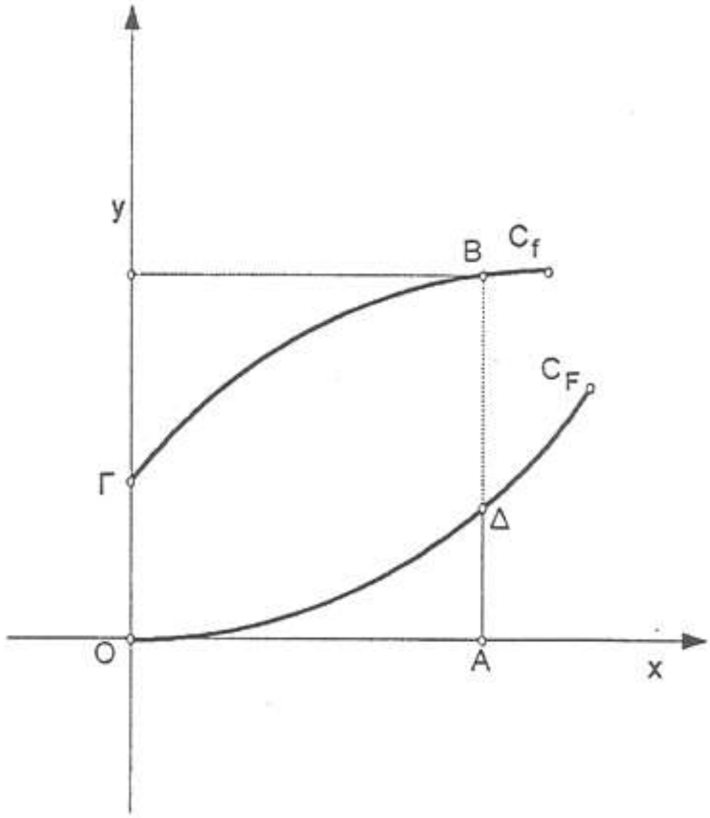
Το Θεμελιώδες Θεώρημα

(Γεωμετρική απόδειξη του Barrow)

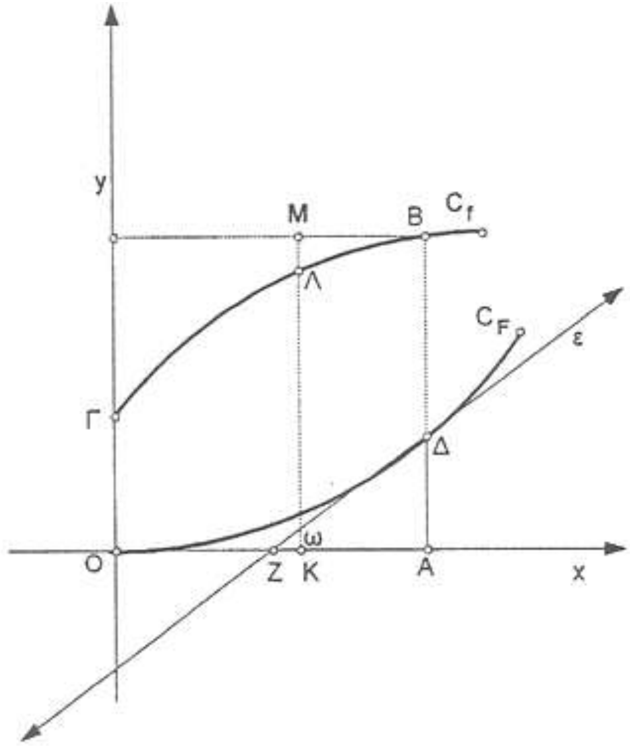
Έστω f αύξουσα συνάρτηση, με γραφική παράσταση C_f. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = F(x)$ του εμβαδού, δηλαδή, τη συνάρτηση που σε κάθε x αντιστοιχίζει το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f, από τον άξονα Oy, τον άξονα Ox και την κάθετη σ' αυτόν ευθεία από το σημείο με τετμημένη x.



Τότε αν πάρουμε ένα σημείο Α του Οx με τετμημένη x_0, η κάθετη ευθεία στο Α τέμνει τη C_F στο Δ και τη C_f στο Β, ενώ $F(x_0) = \text{ΑΔ} = (\text{ΟΑΒΓ})$. Δηλαδή, με σύγχρονη ορολογία,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt .$$

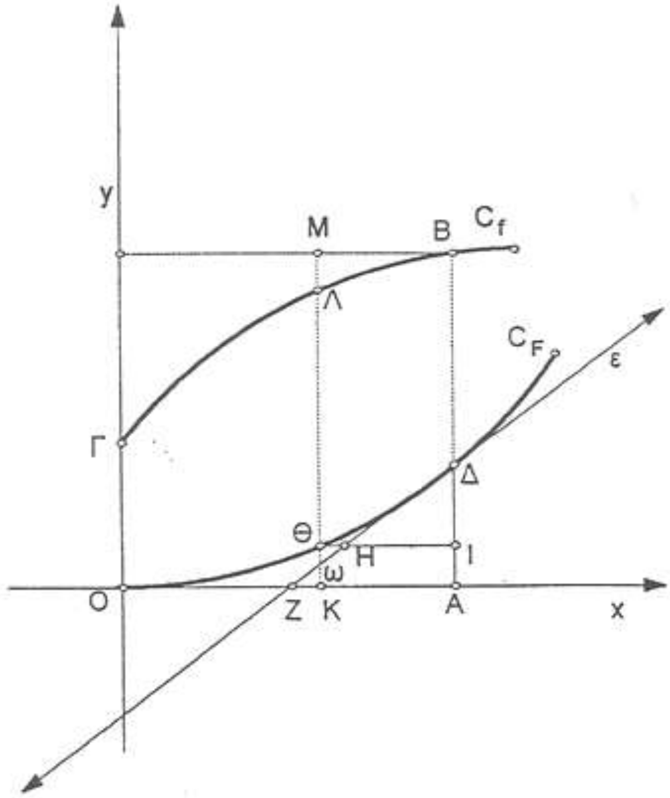
Ο Barrow θέλει να αποδείξει ότι $F'(x_0) = f(x_0)$. Δηλαδή, ότι η κλίση της εφαπτομένης της C_F στο Δ θα πρέπει να ισούται με $f(x_0)$, ή ότι εφω $= f(x_0) = \text{ΑΒ}$.



Αλλά, αφού $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{(A\Delta)}{(AZ)}$, αρκεί να δείξει ότι $\dfrac{(A\Delta)}{(AZ)} = (AB)$, ή ισοδύναμα ότι $\dfrac{(A\Delta)}{(AB)} = (AZ)$. Παίρνει λοιπόν, σημείο Z στον άξονα Ox ώστε

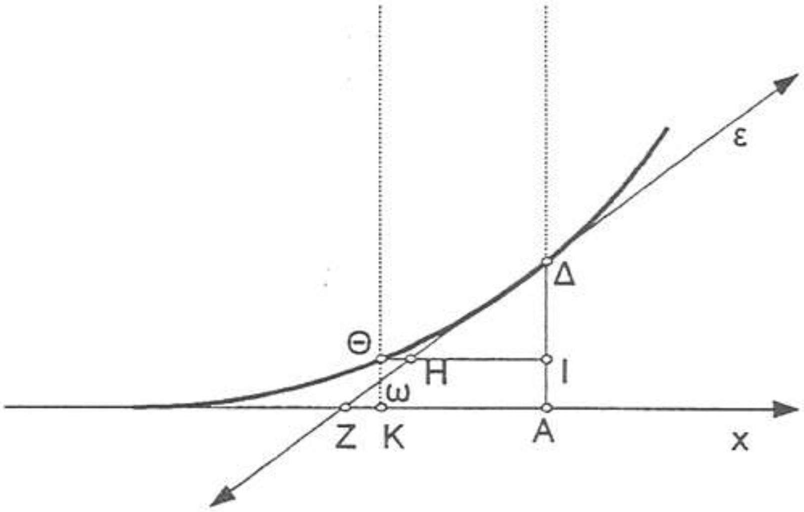
$$\frac{(A\Delta)}{(AB)} = (AZ) \quad (1),$$

και αποδεικνύει ότι η ΔZ είναι η εφαπτομένη της C_F.



Πράγματι, αν πάρουμε τυχαίο σημείο Η της ΖΔ και φέρουμε $ΙΗ \perp ΑΔ$ που τέμνει τη C_f στο Θ, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(ΗΙ) < (ΘΙ)$, οπότε το Η θα είναι εξωτερικό σημείο της C_f, δηλαδή, η ΔΖ θα έχει ένα και μόνο κοινό σημείο με τη C_f, το Δ (και άρα η ΔΖ θα είναι εφαπτομένη της C_f).

Όμως



$$\triangle ΔΗΙ \approx \triangle ΔΖΑ \Rightarrow \frac{(ΔΙ)}{(ΗΙ)} = \frac{(ΔΑ)}{(ΖΑ)} \overset{(1)}{=} ΑΒ \Rightarrow (ΔΙ) = (ΙΗ)(ΑΒ) \quad (2).$$

Επίσης,

$$(ΔΙ) = (ΑΔ) - (ΑΙ) = (ΑΔ) - (ΘΚ) = F(x_0) - F(x) =$$
$$(ΟΑΒΓΟ) - (ΟΚΛΓΟ) = (ΑΒΛΚ) < (ΑΒΜΚ) = (ΑΚ)(ΑΒ) =$$
$$(ΘΙ)(ΑΒ).$$

Άρα $(ΔΙ) < (ΘΙ)(ΑΒ) \overset{(2)}{\Rightarrow} (ΙΗ)\cancel{(ΑΒ)} < (ΘΙ)\cancel{(ΑΒ)} \Rightarrow (ΙΗ) < (ΘΙ)$.

Ο Barrow, βέβαια, δεν είχε την αριθμητική έννοια του ορίου, όμως η διαδικασία που ακολούθησε συνέτεινε στη δημιουργία του απειροστικού λογισμού.