ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Αν είναι $f(a)f(b)<0$ και f συνεχής στο $[a , b]$ τότε υπάρχει $\xi \in (a , b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $f(a) < 0$, $f(b)>0$. Θεωρούμε το σύνολο $S = \{x \in [a , b] \ / \ f(x) < 0\}$. Προφανώς $S \neq \varnothing$ καθώς $a \in S$

Ας είναι ξ το ελάχιστο άνω φράγμα του S δηλαδή $\xi = \sup S$

Αφού f συνεχής στο a θα έχουμε $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) < 0$ άρα υπάρχει $\gamma > 0$ ώστε $f(x) < 0$ $x \in [a , \gamma)$

και αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b) < 0$ άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) > 0$ $x \in [\delta , b)$

Συνεπώς $\xi \geq \gamma$ (σε αντίθετη περίπτωση το ξ δεν θα ήταν άνω φράγμα) και $\xi \leq \delta$ (σε αντίθετη περίπτωση το ξ δεν θα ανήκε στο σύνολο S)

Ώστε $\xi \in (a , b)$. Αλλά f συνεχής στο ξ και υποθέτοντας ότι $f(\xi) < 0$ θα υπάρχει περιοχή του ξ , η

$(\xi - k , \xi+k)$ για τα όλα τα στοιχεία x της οποίας να είναι $f(x) < 0$. Αλλά τότε φυσικά το ξ δεν θα ήταν το sup του S, άτοπο.

Στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι $f(\xi) > 0$ θα υπήρχε περιοχή του ξ, η $(\xi - m , \xi+m)$ για όλα τα στοιχεία x της οποίας θα είχαμε $f(x) > 0$. Αλλά τότε φυσικά όλα αυτά τα x δεν θα ανήκουν στο S, πράγμα που σημαίνει πως υπάρχει μικρότερο άνω φράγμα του S από το ξ, άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι αυτό είναι το ελάχιστο.

Ώστε $f(\xi) = 0$.