4. Σύντομη επισκόπηση της εξέλιξης της Γεωμετρίας

Αν κάποιος θέλει να προοδεύσει στα Μαθηματικά πρέπει να μελετήσει τους μεγάλους δασκάλους των Μαθηματικών κι όχι τους μαθητές.

Ν.Χ. Άμπελ

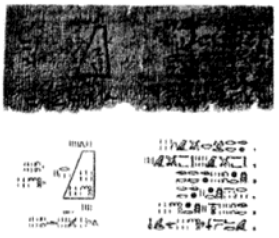
Τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα εμφανίζονται πριν από 15.000 χρόνια περίπου σε αντικείμενα που υπηρετούσαν πρακτικές και διακοσμητικές ανάγκες, στις ζωγραφικές εικόνες των σπηλαίων, τα διακοσμητικά σχέδια των αγγείων και των υφασμάτων κ.α. Ο όρος «Γεωμετρία» προέρχεται από τις λέξεις «Γη» και «μέτρηση». Στο πλαίσιο αυτό ο πρώτος ιστορικός της Γεωμετρίας, ο Εύδημος ο Ρόδιος (περ. 335 π.Χ.), συνέδεσε τη γένεση της Γεωμετρίας με την ανάγκη της μέτρησης της γης στην Αίγυπτο για την αποκατάσταση των ορίων των χωραφιών που εξαλείφονταν από τις ετήσιες πλημμύρες του Νείλου.

Ο πάπυρος του Ρίντ (1650 π.Χ.). Βρετανικό Μουσείο. Λονδίνο.

1. Η Γεωμετρία στην Αρχαία Αίγυπτο και Μεσοποταμία

Οι αρχαιότερες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων που είναι σήμερα γνωστές ανάγονται στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας π.Χ. περίπου και προέρχονται από δύο μεγάλους πολιτισμούς της αρχαίας Ανατολής, της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Στην Αίγυπτο οι μαρτυρίες αυτές έχουν διασωθεί κυρίως σε παπύρους, ενώ στη Μεσοποταμία σε 150 περίπου κείμενα μαθηματικού περιεχομένου, γραμμένα σε σφηνοειδή γραφή πάνω σε πήλινα πινακίδια.

Η Γεωμετρία στην αρχαία Αίγυπτο. Οι κύριες πηγές για τη Γεωμετρία στην Αίγυπτο είναι ο *πάπυρος του Ρίντ (Rhind)* που περιέχει 87 μαθηματικά προβλή-



Τμήμα του παπύρου της Μόσχας (1850 π.Χ.) που απεικονίζει το πρόβλημα της εύρεσης του όγκου τετραγωνικής πυραμίδας. Το επάνω μέρος είναι στην ιερατική και το κάτω είναι μετάφραση στην ιερογλυφική γραφή. Μουσείο Α.Σ. Πούσκιν Μόσχα.

3. Πρωταρχικοί όροι και Αξιώματα

Στο πρώτο κεφάλαιο που αναφέρεται στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας που είναι ο χώρος και τα σχήματα γίνεται αντιληπτό ότι για τη μελέτη του χώρου χρειάζεται η ανασύνθεσή του. Αυτή η ανασύνθεση ξεκινά από κάποια απλά και αυθύπαρκτα στοιχεία, που είναι οι **πρωταρχικοί όροι** και τα **αξιώματα**.

☛ ***Πρωταρχικοί όροι που αφορούν γεωμετρικά αντικείμενα:***
Σημεία, ευθείες, επίπεδα.

☛ ***Πρωταρχικοί όροι που αφορούν ιδιότητες:***
Θέση, μεταξύ, εκατέρωθεν (ορίζεται έμμεσα σε αντιπαράθεση με το μεταξύ).

Όσον αφορά τα αξιώματα, χρησιμοποιούνται ως ακρογωνιαίοι λίθοι για να αναπτυχθεί με αυστηρότητα και συνέπεια το οικοδόμημα της Γεωμετρίας.

Ο τίτλος του βιβλίου που κρατάτε «Ευκλείδεια Γεωμετρία» οφείλεται στον τρόπο συγκρότησης των εννοιών και ανάπτυξης αυτών.

Είναι η μέθοδος που θεμελιώνει λογικά κάθε επιστήμη. Κάτω από το κείμενο κρύβεται η αξιωματική μέθοδος παραγωγής, όπου με αφετηρία κάποιες βασικές αρχές και αποδεικτικές μεθόδους γίνεται η ανάπτυξη.

Όμως αξιώματα προφανή, όπως της συνέχειας και της διάταξης αποφεύγεται να αναφερθούν ως αξιώματα. Ο τρόπος παρουσίασης οφείλει να έχει την απαραίτητη μαθηματική συνέπεια, αυστηρότητα και ακρίβεια και συγχρόνως διδακτική απλότητα και φυσικότητα.

Τα αξιώματα όμως αυτά δεν τονίζονται ιδιαίτερα και, μάλιστα, όλα όσα χρησιμοποιούνται. Τούτο γίνεται για παιδαγωγικούς, διδακτικούς λόγους και ιδιαίτερα για να μην προβάλλεται και υπερτονίζεται κάτι που είναι πασιφανές.

Ο διδάσκων βέβαια πρέπει να είναι γνώστης των αξιωμάτων που υπάρχουν ή υποκρύπτονται σε κάθε κεφάλαιο και μπορεί να τα αναφέρει ιδιαίτερα αν το κρίνει σκόπιμο ή αν προκύψει η ανάγκη αναφοράς αυτών.

ματα, ο παλαιότερος ίσως κατά δύο αιώνες *πάπυρος της Μόσχας* που περιέχει 25 προβλήματα, και ο *πάπυρος του Καχούν (Kahun)*. Οι γεωμετρικές γνώσεις των Αιγυπτίων περιλαμβάνουν τη μέτρηση επιφανειών και όγκων που γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλων αριθμητικών πράξεων. Κατά τα φαινόμενα, γνώριζαν να υπολογίζουν την επιφάνεια ορθογωνίου, τριγώνου και τραπεζίου με ακριβείς κανόνες, αλλά του τετραπλεύρου το υπολόγιζαν με προσεγγιστικό κανόνα ως γινόμενο των ημιαθροισμάτων των αντίθετων πλευρών. Το κατά πόσο γνώριζαν οι Αιγύπτιοι ότι ο κανόνας αυτός είναι προσεγγιστικός δεν μπορούμε σήμερα να απαντήσουμε. Από την άλλη, φαίνεται ότι διέθεταν μια αρκετά καλή προσέγγιση του αριθμού π, ως το τετράγωνο με πλευρά τα 8/9 της διαμέτρου (πάπυρος του *Ριντ*, πρόβλημα 51), η οποία δίνει σφάλμα μικρότερο του 1%. Ωστόσο η μέθοδος εύρεσης αυτού του αποτελέσματος δεν είναι γνωστή. Οι Αιγύπτιοι γνώριζαν επίσης κανόνες υπολογισμού των όγκων πολλών στερεών, όπως του κύβου, του παραλληλεπιπέδου, του πρίσματος και του κυλίνδρου, αλλά το πιο αξιοσημείωτο και αινιγματικό αποτέλεσμα της αιγυπτιακής Γεωμετρίας είναι ο υπολογισμός του όγκου κόλουρης πυραμίδας (πάπυρος της Μόσχας, πρόβλημα 14) που φαίνεται να ακολουθεί τον κανόνα $V=(υ/3)(α^2+αβ+β^2)$, όπου α και β οι πλευρές των τετραγώνων των δύο βάσεων και υ το ύψος (στον πάπυρο α = 4, β = 2, υ = 6).

Εν γένει η Γεωμετρία των Αιγυπτίων αφορά στη μέτρηση στοιχειωδών γεωμε-τρικών σχημάτων και *εμφανίζεται με τη μορφή κανόνων αριθμητικής επίλυσης στοιχειωδών γεωμετρικών προβλημάτων πρακτικής κατ' εξοχήν σημασίας*. Οι υπολογισμοί όγκων για παράδειγμα, εμφανίζονται σε προβλήματα προσδιορισμού του όγκου του σιταριού σε αποθήκη με δεδομένο σχήμα. Πολλές λύσεις γίνονταν με τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους και με άλλους εμπειρικούς κανόνες. Γι' αυτό πολλές φορές ήταν εξαιρετικά άκομψες.

Το περίφημο πινακίδιο Πλίμπτον 322 (1900-1600 π.Χ.). Συλλογή G.A. Plimpton, Τμήμα Σπανίων Βιβλίων και Χειρογράφων του Πανεπιστημίου Κολούμπια.

Η Γεωμετρία της Μεσοποταμίας είναι δημιούργημα δύο κυρίως αρχαιότατων λαών της Ασίας, των Σουμερίων (3.000 π.Χ.) και των Βαβυλωνίων (2η-1η χιλιετία π.Χ.). Το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που εξετάζονται είναι ευρύτερο από αυτό που απαντάμε στην Αίγυπτο. Περιλαμβάνει επιπλέον ορισμένα κανονικά πολύγωνα, τον κυκλικό τομέα και τον κόλουρο κώνο. Όπως και οι Αιγύπτιοι, χρησιμοποιούν τόσο ακριβείς μεθόδους υπολογισμού, όσο και προσεγγιστικές, όπως π.χ. στην εύρεση της επιφάνειας τετραπλεύρου και του όγκου κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας και κόλουρου κώνου. Όμως ο υπολογισμός του αριθμού π ήταν πολύ χονδροειδής. Εκφραζόταν όχι ως συνάρτηση της διαμέτρου, αλλά ως το 1/12 του τετραγώνου της περιφέρειας του κύκλου και δίνει την τιμή 3[1]. Ο κανόνας αυτός για τον υπολογισμό του π απαντάται στην Κίνα και την Ινδία. Επίσης απαντώνται στοιχεία από την θεωρία των κανονικών πολυέδρων (βλ. *Τα κανονικά πολύεδρα*).

[1] Μια καλύτερη προσέγγιση χρησιμοποιείται σε ένα κείμενο από τα Σούσα και ισούται με 3,125=3×(1/8).

Η Γεωμετρία στη Μεσοποταμία έφτασε σε υψηλότερο επίπεδο απ' ότι στην Αίγυπτο. Η συμβολή των Βαβυλωνίων σε σχέση με τους Σουμέριους συνίσταται πιθανότατα στην εξέταση και προβλημάτων που δεν είχαν καθαρά πρακτική, οικονομική ή τεχνική προέλευση, αλλά λαμβάνονται, π.χ. ως αντίστροφα άλλων προβλημάτων. Όμως, παρά την πρόοδο που σημείωσε η Γεωμετρία στη Μεσοποταμία και το πλήθος των μεμονωμένων αποτελεσμάτων, *απουσιάζει το στοιχείο της εσωτερικής λογικής συνοχής ανάμεσα στους πολυάριθμους κανόνες και επομένως η έννοια του «συστήματος» γνώσης.* Πουθενά δεν απαντάται κάποια απόπειρα να δοθεί «λογική απόδειξη» ενός προβλήματος. Η προσέγγιση της Γεωμετρίας είναι κυρίως αριθμητική και η διαδικασία επίλυσης ανάγεται σε μία διαδοχή εντολών που εκτελούνται για συγκεκριμένες περιπτώσεις. Αυτός ο τρόπος μαθηματικής σκέψης, που είναι προσανατολισμένος στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, παρά στο πρόβλημα καθαυτό, χαρακτηρίζει όλες τις προ-Ελληνικές μαθηματικές παραδόσεις της Ανατολής και διατηρείται στη διάρκεια πολλών αιώνων.

2. Η Γεωμετρία της Κλασικής Ελληνικής Αρχαιότητας

Η γένεση της Γεωμετρίας ως αφηρημένης αποδεικτικής επιστήμης. Ποιοτικό άλμα πραγματοποιείται τον 5ο αι. π.Χ. στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετατρέπεται σε ανεξάρτητη αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη και διαμορφώνονται καθαρά οι μαθηματικές έννοιες του σχήματος, της γεωμετρικής πρότασης και της απόδειξης. Η τελευταία, κατά τον Αριστοτέλη, λειτουργεί τόσο ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας πρότασης, όσο και ως μέσο αποσαφήνισης της σχέσης μιας πρότασης με τις άλλες. Για πρώτη φορά εμφανίζεται η ιδέα ότι αν μια πρόταση αποδεικνύεται με βάση μια άλλη, και αυτή με τη σειρά της στηρίζεται σε μια τρίτη, κι αυτή σε μια τέταρτη κ.ο.κ., τότε πρέπει να σταματήσουμε κάπου αυτή την ακολουθία λογικών συμπερασμάτων και κάποια πρόταση να ληφθεί ως υπόθεση και να γίνει δεκτή χωρίς απόδειξη. Η ιδέα αυτή αποτελεί την πεμπτουσία της αξιωματικής προσέγγισης της Γεωμετρίας που αναπτύχθηκε για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα (βλ. *Η αξιωματική μέθοδος*).

Ένα άλλο ποιοτικά νέο χαρακτηριστικό που εμφανίζεται για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα είναι η γένεση σχολών φυσικής φιλοσοφίας στην αρχαία Ιωνία (7ος αι. π.Χ.), οι οποίες επιχείρησαν να ερμηνεύσουν ορθολογικά τον κόσμο με βάση μια πρώτη *αρχή*. Όμως οι πενιχρές ιστορικές μαρτυρίες ότι ο Θαλής ο Μιλήσιος (περ. 600 π.Χ.) απέδειξε πρώτος γεωμετρικά θεωρήματα με γενικό τρόπο και οι συναφείς ιστοριογραφικές αντιλήψεις για δήθεν άνθηση της Γεωμετρίας στις Ιώνιες πόλεις δεν είναι σήμερα αδιαμφισβήτητες[2]. Έμμεσες είναι και οι μαρτυρίες για τα γεωμετρικά επιτεύγματα της Πυθαγόρειας σχολής, η οποία ωστόσο είναι βάσιμο να πιστεύουμε ότι είχε κατεξοχήν αριθμητικό προσανατολισμό. Είναι μάλιστα πολύ γνωστό ότι ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (περ. 540 π.Χ.) επιχείρησε να κατασκευάσει αριθμητικά μοντέλα του κόσμου και να ερμηνεύσει το σύμπαν με βάση τις

[2] Σύμφωνα με μαρτυρία του Ευδήμου, ο Θαλής μαθήτευσε στους Αιγυπτίους. Εν γένει, αρκετοί Έλληνες συγγραφείς (Ηρόδοτος, Πλάτωνας, Αριστοτέλης) θεωρούν ότι η «τέχνη» της Γεωμετρίας εισήχθη στην Ελλάδα από την Αίγυπτο ή τη Βαβυλώνα. Οι μαρτυρίες αυτές έχουν ιστορική βάση, αφού, ως γνωστόν, οι Έλληνες είχαν διαρκή εμπορική και στρατιωτική δραστηριότητα στην Αίγυπτο από τον 7ο αι. π.Χ. Όμως δεν είναι γνωστό πώς εξελίχθηκε ιστορικά η διαδικασία μετάδοσης της γνώσης. Παρ'όλα αυτά είναι αρκετά καθαρό ότι ο χαρακτήρας της Ελληνικής Γεωμετρίας διαφέρει ριζικά από αυτόν της Ανατολής.

κανονικότητες (*αρμονία*) των σχέσεων των φυσικών αριθμών. Η τάση αυτή εκφράζεται εναργέστατα με τη βασική θέση των Πυθαγορείων «τα πάντα είναι αριθμός». Από την άλλη, τα αποσπάσματα του Ιπποκράτη του Χίου για τους μηνίσκους μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι οι μετρικές ιδιότητες των επίπεδων ευθύγραμμων σχημάτων ήταν ήδη γνωστές από την εποχή του Ιπποκράτη.

Είναι μάλλον εύλογο να τοποθετήσουμε τη γένεση της αξιωματικής μεθόδου στη Γεωμετρία την περίοδο της άνθησης της Ακαδημίας του Πλάτωνα. Ιδιαίτερα σημαντική επίδραση στη διαδικασία αυτή φαίνεται να είχε η θεωρία των ιδεών του Πλάτωνα (περ. 400 π.Χ.), η πρώτη θεωρία αφηρημένων αντικειμένων στην ιστορία της ευρωπαϊκής σκέψης. Οι μαθηματικοί, ξεκινώντας από τον Ιπποκράτη το Χίο και το Λέοντα, έγραφαν «Στοιχεία», όπου προσέγγιζαν τη Γεωμετρία πιθανότατα με διαφορετικούς τρόπους και ξεκινώντας από διαφορετικές προτάσεις ως υποθέσεις.

Όμως το έργο που σφράγισε την εποχή αυτή, αλλά και τη μετέπειτα εξέλιξη της Γεωμετρίας για πολλούς αιώνες, διαμορφώνοντας το ιδεώδες της αξιωματικής απόδεικτικής επιστήμης ήταν *τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη* (περ. 3ος αι. π.Χ.). Τα «Στοιχεία» αποτελούν ταυτόχρονα και σύνοψη της μακραίωνης ελληνικής γεωμετρικής παράδοσης, αφού το μεγαλύτερο μέρος τους αντανακλά τη μαθηματική έρευνα από τον 4ο αι. π.Χ. και σε μερικές περιπτώσεις και προγενέστερα.

Τα «Στοιχεία» αποτελούνται από 13 Βιβλία, οκτώ από τα οποία (I-IV, VI, XI-XIII) είναι αφιερωμένα στη Γεωμετρία και τα υπόλοιπα στην Αριθμητική. Το Βιβλίο Ι περιγράφει τις βασικές ιδιότητες των τριγώνων, των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων και καταλήγει με το θεώρημα του Πυθαγόρα. Στο Βιβλίο ΙΙ αναπτύσσονται σε γεωμετρική γλώσσα μέθοδοι λύσης προβλημάτων που ερμηνεύονται ως δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Στο Βιβλίο ΙΙΙ αποδεικνύονται ιδιότητες του κύκλου, των εφαπτομένων και των χορδών (τα προβλήματα αυτά είχαν αρχίσει να μελετώνται ήδη από την εποχή του Ιπποκράτη του Χίου). Στο Βιβλίο IV γίνεται η κατασκευή των κανονικών ν-γώνων (ν=3, 4, 5, 10, 15).

Το Βιβλίο V περιέχει τη *γενική θεωρία των αναλογιών* του Ευδόξου του Κνίδιου (4ος αι. π.Χ.), που είναι η βάση για τη θεωρία της ομοιότητας (Βιβλίο VI), και τη μεθοδο της εξάντλησης (Βιβλίο XII), η οποία ανάγεται επίσης στον Εύδοξο.

Τα Βιβλία VII-IX είναι αφιερωμένα στην Αριθμητική των φυσικών αριθμών και των λόγων τους και στηρίζονται στον αλγόριθμο της *ανθυφαίρεσης*, δηλαδή της εύρεσης του μέγιστου κοινού μέτρου δύο αριθμών. Με βάση τα Βιβλία αυτά κατασκευάζεται η ταξινόμηση των τετραγωνικών άρρητων μεγεθών στο Βιβλίο Χ, η οποία αποδίδεται στο Θεαίτητο (αρχές του 4ου αι. π.Χ.).

Στο Βιβλίο XI τίθενται οι αρχές της Στερεομετρίας, και στο Βιβλίο XII με τη βοήθεια της *μεθόδου της εξάντλησης* (βλ. *Μέτρηση*) γίνεται μέτρηση καμπύλων σχημάτων με βάση τη μέτρηση ευθύγραμμων σχημάτων. Με τη μέθοδο αυτή αποδεικνύεται ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους, συγκρίνονται οι όγκοι κυλίνδρων και κώνων με τους όγκους των αντίστοιχων πρισμάτων και πυραμίδων και αποδεικνύεται ότι οι όγκοι δύο σφαιρών έχουν λόγο ίσο με το λόγο των κύβων των διαμέτρων τους.

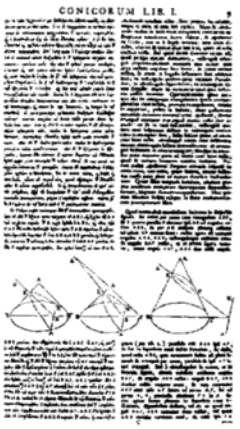
Το οικοδόμημα των «Στοιχείων» επισφραγίζεται με την κατασκευή των πέντε κανονικών στερεών (Βιβλίο XIII), του τετραέδρου, του κύβου, του οκταέδρου, του δωδεκαέδρου και του εικοσαέδρου. Υπολογίζονται οι πλευρές τους σε συνάρτηση με

την ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας με τη βοήθεια της θεωρίας των αρρήτων του Βιβλίου Χ και καταδυκνύεται ότι δεν υπάρχουν άλλα κανονικά στερεά.

Ο Ευκλείδης διαιρεί τις μαθηματικές προτάσεις σε δύο είδη: «θεωρήματα» και «προβλήματα». Στα θεωρήματα ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα, ενώ στα προβλήματα ζητείται να κατασκευασθεί κάποιο αντικείμενο που να έχει μια ορισμένη ιδιότητα. Στα «Στοιχεία» όλες αυτές οι κατασκευές στηρίζονται σε τρία αιτήματα: ότι από σημείο σε σημείο άγεται μία ευθεία, ότι μία πεπερασμένη ευθεία μπορεί να προεκτείνεται έπ' άπειρον, και ότι δεδομένου ενός σημείου ως κέντρου και ενός ευθύγραμμου τμήματος ως ακτίνας μπορεί να κατασκευαστεί κύκλος. Αυτά τα αιτήματα περιορίζουν τις κατασκευές στη χρήση του κανόνα και του διαβήτη (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της Αρχαιότητας*).

3. Η Γεωμετρία των Ελληνιστικών Χρόνων

Αρχιμήδης και Απολλώνιος. Τα «Στοιχεία» εγκαινιάζουν τη χρυσή εποχή της αρχαίας ελληνικής Γεωμετρίας (3ος αι. π.Χ.) όπου δεσπόζουσες φυσιογνωμίες αναδεικνύονται ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (περ. 287-212 π.Χ.) και ο Απολλώνιος ο Περγαίος (δεύτερο μισό του 3ου-αρχές του 2ου αι. π.Χ.). Ο Αρχιμήδης διευρύνει τη σφαίρα εφαρμογής της Ευδόξειας μεθόδου της εξάντλησης με τη μέτρηση καμπυλόγραμμων επιφανειών και όγκων νέων γεωμετρικών αντικειμένων (εμβαδόν δακτυλίου έλικας, εμβαδόν παραβολικού τομέα, εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας και όγκος σφαίρας, σφαιρικού και παραβολοειδούς τμήματος). Οι περισσότερες καινοτομίες στην κατεύθυνση αυτή βασίζονται στην εισαγωγή της έννοιας της κίνησης στη Γεωμετρία (στον κινηματικό ορισμό της έλικας και των σωμάτων εκ περιστροφής). Στον Αρχιμήδη ανήκει και η πρώτη μέθοδος για την προσέγγιση του αριθμού π (ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο του κύκλου) μεταξύ των τιμών 310/70 και 310/71.



Οι κωνικές τομές του Απολλωνίου, παραβολή (αριστερά), υπερβολή (μέσο), έλλειψη (δεξιά), από την έκδοση των «Κωνικών» του Έντμ. Χάλλεϋ, Οξφόρδη, 1710.

Ο Απολλώνιος είναι περισσότερο γνωστός από τη θεωρία των κωνικών τομών, των καμπυλών που λαμβάνονται από την τομή ενός επιπέδου με την επιφάνεια ενός (μονόχωνου ή δίχωνου) κώνου. Όταν το τέμνον επίπεδο είναι παράλληλο προς τη γενέτειρα του κώνου η λαμβανόμενη καμπύλη λέγεται παραβολή, αν τέμνει το ένα χωνί του κώνου παράγεται έλλειψη και αν τέμνει και τα δύο χωνιά παράγεται υπερβολή. Ο Απολλώνιος περιγράφει διεξοδικά τις ιδιότητες αυτών των καμπυλών στο έργο του «Κωνικά», που αποτελείται από οκτώ Βιβλία. Τα τέσσερα πρώτα διασώθηκαν στα Ελληνικά, τα επόμενα τρία σε αραβική μετάφραση του Άραβα μαθηματικού Θαμπίτ Ιμπν Κούρρα, ενώ το Βιβλίο VIII έχει χαθεί.

Ο Απολλώνιος εισάγει μια σημαντική καινοτομία στη μελέτη των κωνικών τομών. Πριν τον Απολλώνιο, ο Μέναιχμος, που είχε μελετήσει τις επίπεδες τομές ορθογώνιου, οξυγώνιου και αμβλυγώνιου κώνου εκ περιστροφής, σε σχέση με το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*), είχε αποδείξει τη βασική ιδιότητα των καμπυλών αυτών, που οι αρχαίοι ονόμαζαν *σύμπτωμα*, ως προς δύο άξονες «τεταγμένων», την κύρια διάμετρο και την κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από την κορυφή της καμπύλης. Ο Απολλώνιος, από την άλλη, εξετάζει τις κωνικές τομές ως προς *οποιαδήποτε* διάμετρο και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της. Κατόπιν ταξινομεί τις κωνικές ανάλογα με τη μορφή του *συμπτώματος*. Αυτή η ταξινόμηση είναι νόμιμη αφού η μορφή του συμπτώματος δεν αλλάζει, αν η καμπύλη θεωρηθεί ως προς μια άλλη διάμετρο και τις συζυγείς χορδές της.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι άξονες των «τεταγμένων» στους αρχαίους γεωμέτρες είναι στενά συνδεδεμένοι με το σχήμα της κωνικής τομής, σε αντιδιαστολή με τη μέθοδο των συντεταγμένων στο έργο του Φερμά και του Ντεκάρτ, όπου οι άξονες λαμβάνονται αυθαίρετα και είναι ανεξάρτητοι από το εξεταζόμενο σχήμα. Επιπλέον, στη Γεωμετρία του Ντεκάρτ οποιαδήποτε καμπύλη μπορεί να μελετηθεί ως προς τους άξονες αυτούς.

Ο Απολλώνιος εξέτασε επίσης την έλικα που γράφεται σε επιφάνεια κυλίνδρου, ενώ στο έργο του «Περί επαφών», το οποίο δε διασώθηκε, κάνει τη γνωστή κατασκευή του κύκλου που εφάπτεται σε τρεις δεδομένους κύκλους ή σε οποιονδήποτε συνδυασμό τριών σημείων, ευθειών και κύκλων.

Το έργο του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλωνίου ήταν το αποκορύφωμα της αρχαίας αφηρημένης Γεωμετρίας. Η ιστορική περίοδος μετά το 2ο αι. π.Χ. χαρακτηρίζεται ως εποχή παρακμής των ελληνικών Μαθηματικών. Αξιοσημείωτο παραμένει το έργο του Πάππου (αρχές του 4ου αι. μ.Χ.), που επικεντρώνεται στη μελέτη καμπυλών σε «κρίκο» (torus) και άλλες επιφάνειες. Αργότερα ο Ευτόκιος (αρχές του 6ου αι.) και ο Σερήνος έγραψαν σχόλια στον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο από τα οποία μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για έργα παλαιότερων μαθηματικών που δε διασώθηκαν. Οι μεμονωμένες όμως αυτές μελέτες δεν υπερέβησαν τον κύκλο προβλημάτων που χαράχτηκε από τους τρεις μεγάλους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Δε βρίσκει κανείς ούτε νέες μεγαλοφυείς μαθηματικές ιδέες ούτε στίγματα νέων θεωριών. Βρίσκει όμως έναν επαναπροσανατολισμό των μαθηματικών ενδιαφερόντων προς νέες κατευθύνσεις εφαρμοσμένης Γεωμετρίας.

Οι εφαρμοσμένες γεωμετρικές προσεγγίσεις. Μία από τις κύριες ενασχολήσεις των γεωμετρών του 3ου αι. π.Χ. ήταν η ανάπτυξη γεωμετρικών προσεγγίσεων στη μελέτη των φυσικών επιστημών, ειδικότερα τη Μηχανική, την Οπτική και την Αστρονομία και η προσπάθεια να εκφράσουν τις βασικές έννοιες και αρχές τους ως συνάρτηση γεωμετρικών και αριθμητικών μεγεθών.

Στη Μηχανική συνεχίζεται η Περιπατητική τάση της μελέτης μηχανών με τα «Μηχανικά» του Ήρωνα (περ. 60 μ.Χ.). Όμως ποτέ την περίοδο αυτή οι μαθηματικές μέθοδοι στη Μηχανική δεν έφτασαν το επίπεδο της στατικής στα έργα του Αρχιμήδη «Επιπέδων Ισορροπιών» και «Οχουμένων».

Στην Οπτική η αρχή γίνεται και πάλι από τον Ευκλείδη που στα «Οπτικά» του διατυπώνει την υπόθεση ότι οι φωτεινές ακτίνες είναι ευθείες γραμμές. Μια πιο εμπειρική από τον Ευκλείδη προσέγγιση των οπτικών φαινομένων απαντάται στα «Οπτικά» του Πτολεμαίου (2ος αι. μ.Χ.) πάνω στη γεωμετρική οπτική και κατοπτρική. Ο Διοκλής (τέλος του 2ου αι. π.Χ.) αποδεικνύει ότι η επιφάνεια που αντανακλά τις ηλιακές ακτίνες και τις συγκεντρώνει σε ένα σημείο είναι παραβολοειδές εκ περιστροφής.

Στο πεδίο της Αστρονομίας συνεχίζεται η παράδοση του Ευδόξου, που είχε κατασκευάσει ένα γεωκεντρικό μοντέλο κίνησης των πλανητών με βάση την αρχή του Πλάτωνα ότι μόνο συνδυασμοί ομοιόμορφων κυκλικών κινήσεων είναι επιτρεπτοί. Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος (3ος αι. π.Χ.) προτείνει ένα μοντέλο κυκλικών τροχιών με κέντρο όμως τον Ήλιο, το οποίο δεν έγινε αποδεκτό στην εποχή του. Ένα εναλλακτικό μοντέλο προτάθηκε από τον Απολλώνιο, όπου οι πλανήτες περιστρέφονται γύρω από ένα σημείο, το οποίο ακολουθεί κυκλική τροχιά με κέντρο τη Γη ή κοντά στη Γη. Η Γεωμετρία της σφαίρας

Το χειρόγραφο αυτό των «Οπτικών» του Ευκλείδη με τις καλαίσθητες μικρογραφίες με δρόμους πιθανολογείται ότι ανήκε στον Πιέρο ντελα Φραντσέσκα. Βιβλιοθήκη Ντιούκ του Ουρμπίνο (Urb. lat. 1329 φ. 1 recto).

Περσικό χειρόγραφο του 15ου αι. με σχόλια του Νασίρ αντ-Ντιν ατ Τουσί στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

έγινε το αντικείμενο πραγματείας του Θεοδοσίου (3ος ή 2ος αι. π.Χ.), που συνεχίζει την παράδοση του Ευκλείδη, του Αυτολύκου (περ. 300 π.Χ.) στη σφαιρική αστρονομία, και των «Σφαιρικών» του Μενελάου (1ος αι. μ.Χ.).

Η σημαντικότερη όμως ανασυγκρότηση της ελληνικής Αστρονομίας σε θεωρητικό και πρακτικό επίπεδο έγινε από τον Ίππαρχο (2ος αι. π.Χ.), ο οποίος ήταν ίσως ο πρώτος που έκανε ποσοτικές μετρήσεις για τους κύκλους των υποθετικών αστρονομικών μοντέλων με βάση παρατηρησιακά δεδομένα. Δυστυχώς, τα πρωτότυπα έργα του Ιππάρχου δεν έχουν διασωθεί και κύρια πηγή για αυτό είναι η «Μαθηματική Σύνταξη (Αλμαγέστη)» του Πτολεμαίου, στο οποίο εκτίθεται η θεωρία των φαινομένων κινήσεων του Ήλιου, της Σελήνης και των πλανητών. Το έργο αυτό χαρακτηρίζεται από τη σύνθεση της ελληνικής επιστημονικής κληρονομιάς με τη βαβυλωνιακή αστρονομική παράδοση. Επίσης, αν και δεν υπήρχε στην αρχαιότητα συστηματική

θεωρία για τα σφάλματα των παρατηρήσεων, ο Ίππαρχος και ο Πτολεμαίος προσπάθησαν να καθορίσουν τις συνθήκες που θα ελαχιστοποιούσαν τα σφάλματα στους υπολογισμούς τους.

4. Η Γεωμετρία των Μέσων Χρόνων και της Αναγέννησης

Η ελληνική γεωμετρική κληρονομιά του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλωνίου και του Μενελάου διατηρήθηκε και διαδόθηκε από τους Βυζαντινούς σε ορισμένα πνευματικά κέντρα του αραβικού κόσμου[3], όπως π.χ. ο «Οίκος της Σοφίας» στη Βαγδάτη. Πολλά επιστημονικά έργα μεταφράζονται στα Αραβικά εκείνη την εποχή, όπως ορισμένα έργα του Αρχιμήδη, τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (τον 8ο-9ο αι.), τα «Κωνικά» του Απολλωνίου από τους αδελφούς Μπανού Μούσα (τον 9ο αι.). Έτσι διασώθηκαν και ορισμένα έργα σε Αραβική μετάφραση που απωλέσθησαν στα ελληνικά, όπως τα «Σφαιρικά» του Μενελάου, το «Περί διαιρέσεων» του Ευκλείδη, τα Βιβλία V-VII των «Κωνικών», και τα Βιβλία IV-VII των «Αριθμητικών» του Διοφάντου. Το 10ο αι. οι Άραβες γεωμέτρες χρησιμοποιούν τα «Κωνικά» του Απολλωνίου στη λύση προβλημάτων που δεν επιλύονται με κανόνα και διαβήτη (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της Αρχαιότητας*), στη μέτρηση επιφανειών και όγκων επίπεδων και στερεών σχημάτων που σχηματίζονται με τη βοήθεια κωνικών τομών καθώς και σε ορισμένα προβλήματα Οπτικής που αφορούν στις ιδιότητες κατόπτρων με σχήμα κωνική τομή. Πρωτότυπος είναι ο υπολογισμός του τμήματος παραβολής από τον Θαμπίτ Ιμπν Κούρρα (836-901), που υπολόγισε επίσης τον όγκο στερεού εκ περιστροφής της παραβολής περί τον άξονά της. Επίσης ο Ιμπν αλ Χαϊθάμ (περίπου 965-1039) προσδιόρισε τον όγκο στερεού εκ περιστροφής παραβολικού τμήματος περί την τεταγμένη. Η μέθοδος των αποδείξεων αυτών παραμένει Αρχιμήδεια.

Από τα θεωρητικά προβλήματα της Γεωμετρίας αξιοσημείωτες είναι οι αναζητήσεις των Αράβων μαθηματικών στη θεωρία των παραλλήλων κατά τη διάρκεια του 9ου-14ου αι. Πολλοί Άραβες μαθηματικοί θεωρούσαν ότι το 5ο αίτημα των «Στοιχείων» του Ευκλείδη είναι θεώρημα και προσπαθούσαν να το αποδείξουν με βάση τα υπόλοιπα αιτήματα και αξιώματα των «Στοιχείων». Στην Ευρώπη παρόμοιες προσπάθειες χρονολογούνται από το 13ο αι. (βλ. *Η θεωρία των παραλλήλων*).

Το 12ο-13ο αι. πολλά αραβικά μαθηματικά έργα, καθώς και αραβικές μεταφράσεις ελληνικών έργων μεταφράζονται στα λατινικά κυρίως στην Ισπανία και τη Σικελία. Την εποχή εκείνη το επίπεδο των αραβικών Μαθηματικών ήταν υψηλότερο από αυτό του δυτικού κόσμου και άσκησε σημαντική επίδραση στην ανάπτυξη της επιστήμης στην Ευρώπη. Έτσι στο έργο του Λεονάρδου της Πίζας (Leonardo Pisano ή Fibonacci, 1180-1250) διαπιστώνει κανείς επίγνωση των έργων του Αμπού Καμίλ (περίπου 850-930), ενώ στις τριγωνομετρικές μελέτες του Ι. Ρεγιομοντάνου (J. Regiomontanus, 1436-1476) είναι πρόδηλα τα ίχνη του έργου του Νασίρ αντ-Ντιν ατ Τουσί (1201-1274). Το ανθρωπιστικό κίνημα δεν προσέφερε τίποτα καινούργιο στη μαθηματική δημιουργία καθαυτή, αλλά οι φιλολογικές σπουδές έκαναν προσιτά τα κλασικά έργα των μαθημα-

[3] Ο όρος «Αραβικός» χρησιμοποιείται με την έννοια όχι της εθνικής καταγωγής των επιστημόνων (αφού αρκετοί από τους ονομαζόμενους «Άραβες» επιστήμονες ζούσαν στην Περσία, τη Συρία και σε άλλες χώρες), αλλά με την έννοια της γλώσσας που ήταν γραμμένα τα έργα τους, που ήταν πάντα η Αραβική.

τικών της αρχαιότητας. Έτσι, τον 16ο αι. υπήρχαν π.χ. πάνω από εκατό εκδόσεις των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Μια άλλη σημαντική πηγή διάδοσης της Αρχιμήδειας παράδοσης που αρχίζει από τον 6ο αι. είναι η απολεσθείσα συλλογή του Ισιδώρου, του αρχιτέκτονα του ναού της Αγίας Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη, με τα διασωθέντα σχόλια του μαθητή του Ευτοκίου, που έκαναν γνωστά από πολύ νωρίς τα έργα του Αρχιμήδη στους μαθηματικούς της Δύσης και άσκησαν επίδραση στον Νικόλαο Κουζάνο, τον Λεονάρντο ντα Βίντσι (1452-1519), τον Μαυρόλυκο και τον Ν. Ταρτάλια (N. Tartaglia, περίπου 1500-1557).

Στη διάρκεια των Μέσων Χρόνων ο χαρακτήρας της Γεωμετρίας παραμένει πολύ κοντά στο χαρακτήρα της Γεωμετρίας των Ελληνιστικών χρόνων. Από τη μια, ακολουθεί την ελληνική γεωμετρική παράδοση των Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απολλωνίου, και από την άλλη, εδραιώνεται η διάκριση ανάμεσα στη θεωρητική και την πρακτική Γεωμετρία με το έργο του Χιού του Αγ. Βίκτορος (Hugh of Saint Victor) που εκδίδεται στο Παρίσι γύρω στο 1130. Η δεύτερη αυτή τάση, που εκτείνεται από το 12ο ως το 16ο αι., χαρακτηρίζεται από τον προσανατολισμό στην εμπειρική Γεωμετρία, τη σύνδεσή της με τις υπολογιστικές μεθόδους και τη χρήση εργαλείων μέτρησης. Ένα άλλο δημιούργημα της Ευρωπαϊκής Αναγέννησης, που συνδέεται με την τέχνη και την αρχιτεκτονική, είναι η ανάπτυξη της θεωρίας της προοπτικής στα έργα των Βιτέλο (Vitelo, περίπου 1225-1280), Λ. Μπ. Αλμπέρτι (L.B. Alberti, 1404-1472), ντελα Φραντσέσκα, ντα Βίντσι (L. da Vinci, 1452-1519) και Ντύρερ (A. Dürer, 1471-1528).

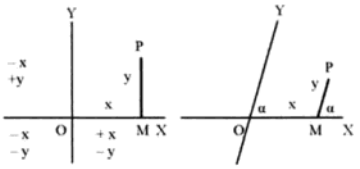
5. Η Γεωμετρία του 17ου και 18ου αι.

Η γοργή ανάπτυξη της Γεωμετρίας το 17ο αι. στηρίζεται εν μέρει στη συνειδητή συνέχιση του αρχαίου κλασσικού μαθηματικού ιδεώδους, αλλά και την αφομοίωση της επιστήμης του Αραβικού κόσμου. Ο Χούυχενς (Huygens, 1629-1695) και ο Νεύτωνας (I. Newton, 1642-1727) θεωρούσαν την ελληνική Γεωμετρία ως πρότυπο αυστηρότητας. Η Γεωμετρία του Απολλωνίου ήταν το έναυσμα νέων προσεγγίσεων στη Γεωμετρία, όπως η μέθοδος των Καρτεσιανών συντεταγμένων και η προβολική Γεωμετρία. Την ίδια περίοδο η ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, που αποτέλεσε το μεγαλύτερο μαθηματικό επίτευγμα του 17ου αι. και ανέδειξε σε ξεχωριστό κλάδο τη μελέτη της *συναρτησιακής* εξάρτησης μεταξύ δύο μεγεθών, οδήγησε στη γένεση νέων επιστημονικών κλάδων των Μαθηματικών και την ανάδειξη της ανάλυσης ως βασικού μαθηματικού κλάδου, αντί της Γεωμετρίας.

Πιέρ Φερμά (1601-1665)

Με την Αναλυτική Γεωμετρία είχε βρεθεί ένας καθολικός τρόπος «μετάφρασης» των προβλημάτων της Γεωμετρίας στη γλώσσα της Άλγεβρας και τη συνακόλουθη ανάλυση και λύση τους με καθαρά αλγεβρικές και αναλυτικές μεθόδους. Από την άλλη, άνοιξαν νέες δυνατότητες εποπτικής ερμηνείας των αλγεβρικών και αναλυτικών γεγονότων με τη βοήθεια της Γεωμετρίας. Η δεύτερη αυτή δυνατότητα είχε

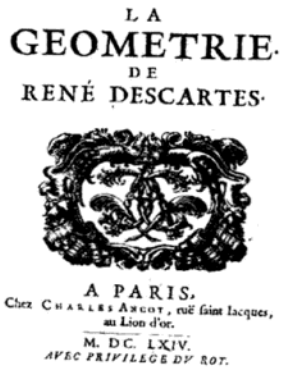
τον περιορισμό ότι ο χώρος εθεωρείτο τρισδιάστατος. Αυτό συνέτεινε στο να θεωρούνται η Αριθμητική, η Άλγεβρα και ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός ως κλάδοι των «καθαρών». Μαθηματικών, που ασχολούνται με αριθμούς και μεγέθη και τις συναρτησιακές τους εξαρτήσεις, ενώ η Γεωμετρία ως «εφαρμοσμένη» επιστήμη που εφαρμόζει και ερμηνεύει τα αποτελέσματα των καθαρών Μαθηματικών. Μέχρι το τέλος του 17ου αι. η εκτεταμένη εφαρμογή των αναλυτικών μεθόδων, η αφομοίωση των εφαρμοσμένων κλάδων από το σώμα των «καθαρών» μαθηματικών και η υιοθέτηση μιας πιο πραγματιστικής αντίληψης για θέματα λογικής αυστηρότητας αντικατέστησε το παραδοσιακό ελληνικό επιστημονικό ιδεώδες.



Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Η γένεση της αναλυτικής Γεωμετρίας. Οι δύο ιστορικές πηγές της νέας Γεωμετρίας ήταν η γεωμετρική παράδοση του Απολλωνίου και του Πάππου, από την μια, και η αλγεβρική παράδοση της ιταλικής Αναγέννησης που αποκορυφώθηκε στο έργο του Φ. Βιέτ (F. Viète, 1540-1603) «Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη» (*In artem analyticem isagoge*, 1591), όπου εισάγεται η έννοια της αλγεβρικής μεταβλητής την οποία ο Βιέτ συμβολίζει με κεφαλαία φωνήεντα (*A*, *E*, *I*, *O*, *U*).

Η αναλυτική τέχνη του Βιέτ εφαρμόστηκε από τον Φερμά (P. Fermat) και τον Ντεκάρτ στη μελέτη καμπυλών, ειδικότερα στην Απολλώνια θεωρία των γεωμετρικών τόπων, όπως αυτή διασώθηκε στη «Συναγωγή» του Πάππου. Στο έργο του «Εισαγωγή στους τόπους στο επίπεδο και το χώρο» (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*) ο Φερμά καταλήγει στη διατύπωση της βασικής αρχής της αναλυτικής Γεωμετρίας που συνδέει δύο διαφορετικές κλάσεις μαθηματικών αντικειμένων: τις γεωμετρικές καμπύλες και τις αλγεβρικές εξισώσεις. Σε άλλη εργασία του το 1636 αποδεικνύει ότι αν η αλγεβρική εξίσωση είναι τετραγωνική, τότε η καμπύλη είναι κωνική τομή.


LA
GEOMETRIE.
DE
RENÉ DESCARTES.

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, ruë Saint Iacques, au Lion d'or.
M. DC. LXIV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Η «Γεωμετρία» του Ντεκάρτ (1644)

Η εμφάνιση της «Γεωμετρίας» (*La Géométrie*, 1637) του Ντεκάρτ (Descartes, 1596-1650) σηματοδοτεί τη γένεση της αναλυτικής Γεωμετρίας με την εγκατάλειψη του αλγεβρικού συμβολισμού του Βιέτ που χρησιμοποιεί ο Φερμά, την εισαγωγή γραμμάτων από το τέλος του αλφαβήτου (x, y, z) για το συμβολισμό μεταβλητών και παραμέτρων και τη σύνδεση των καμπυλών και των εξισώσεων με τη βοήθεια της γενικής ιδέας του (πλαγιογωνίου, στον Ντεκάρτ) συστήματος συντεταγμένων. Με τον τρόπο αυτό οι γεωμετρικές σχέσεις εκφράζονται μέσω μιας αναλυτικής συναρτησιακής εξάρτησης και ο Ντεκάρτ χρησιμοποιεί την αλγεβρική προσέγγιση για να βρει τις λύσεις των γεωμετρικών προβλημάτων

με τη βοήθεια «εργαλείων» που αποτελούν γενικεύσεις του κανόνα και του διαβήτη. Όμως η έννοια των «εργαλείων» του Ντεκάρτ απέκλειε τις καμπύλες που κατασκευάζονται με κινηματικές διαδικασίες (π.χ. την έλικα του Αρχιμήδη). Κατά συνέπεια, η γεωμετρική καμπύλη για τον Ντεκάρτ περιορίζεται σε αυτήν που μπορεί να εκφραστεί ως πολυώνυμο $f(x, y) = 0$ πεπερασμένου βαθμού με δύο μεταβλητές.

Η εφαρμογή στη Γεωμετρία των μεθόδων του απειροστικού λογισμού. Μετά τον Ντεκάρτ, η αναλυτική Γεωμετρία αναπτύχθηκε από τους μαθηματικούς της ομάδας της Leiden που είχαν συσπειρωθεί γύρω από το Δανό μαθηματικό Φ. βαν Σχότεν (F. van Schooten, 1615-1660). Το 1679 ο Γάλλος μαθηματικός Φ. λα Ίρ (Ph. La Hire) εισάγει καρτεσιανές συντεταγμένες στο χώρο, αλλά η αναλυτική Γεωμετρία στο χώρο ήταν ουσιαστικά έργο του Α. Παράν (A. Parent) το 1700 που συνεχίστηκε από τον Γ. Μπερνούλλι (J. Bernoulli, 1667-1748), τον Λ. Όυλερ (L. Euler) και τον Ι. Χέρμαν (I. Hermann).

Αυτό όμως που οδήγησε σε πραγματικό μετασχηματισμό της Γεωμετρίας ήταν ο συνδυασμός της αναλυτικής Γεωμετρίας με τις μεθόδους του απειροστικού λογισμού του Νεύτωνα και του Λάιμπνιτς. Η αρχή γίνεται με τη συστηματική μελέτη των καμπυλών τρίτου βαθμού από τον Νεύτωνα (1704) και ανώτερου βαθμού από τους Στέρλινγκ (J. Stirling, 1695-1770), Μακλώριν (C. Maclaurin, 1698-1746), και Μπρέικενριντζ (W. Braikenridge, 1700-1769). Όμως, ο μετασχηματισμός αυτός της Γεωμετρίας σηματοδοτείται από την πρωτότυπη έκθεση της αναλυτικής Γεωμετρίας του Όυλερ, το 1748, στο δεύτερο τόμο της «Εισαγωγής στην ανάλυση των απειροστών» (*Introductio in analysin infinitorum*), όπου, εγκαταλείποντας τις παραδοσιακές μεθόδους του Νεύτωνα, επιχειρεί συστηματικά να λύσει όλα τα γεωμετρικά προβλήματα με τις μεθόδους της Άλγεβρας και της Ανάλυσης.

Η παραπέρα ανάπτυξη της αναλυτικής Γεωμετρίας οδηγεί πλέον στη διαφοροποίηση δύο νέων κλάδων: της διαφορικής Γεωμετρίας και της προβολικής Γεωμετρίας. Μεμονωμένες έννοιες της *διαφορικής Γεωμετρίας* απαντώνται ήδη από το 17ο αι., όπως η ακτίνα καμπυλότητας (Κέπλερ 1604), οι ενειλιγμένες και εξειλιγμένες καμπύλες (Χούυχενς 1673) κ.ά. Όμως οι έννοιες αυτές παρέμεναν τμήμα της Ανάλυσης. Η διαφορική Γεωμετρία ανεξαρτητοποιείται ως κλάδος με τη μελέτη καμπυλών και επιφανειών στο χώρο και την εφαρμογή των μέσων της ανάλυσης στην αναλυτική Γεωμετρία του χώρου. Η διαδικασία εγκαινιάζεται με το έργο του Α. Κλαιρώ (A.C. Clairaut, 1713-1765) «Έρευνες για τις καμπύλες διπλής καμπυλότητας» (1731), όπου εφαρμόζονται μέθοδοι του απειροστικού και ολοκληρωτικού λογισμού στην τρισδιάστατη αναλυτική Γεωμετρία, ειδικότερα σε προβλήματα εφαπτομένων και καθέτων σε καμπύλες του χώρου, εφαπτόμενου επιπέδου σε επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται δεδομένη καμπύλη κ.α. Επέκταση της διαφορικής Γεωμετρίας στη μελέτη επιφανειών πραγματοποιείται με τις «Έρευνες για την καμπυλότητα των επιφανειών» (1760) του Λ. Όυλερ. Με

Λεονάρντ Όυλερ (1707-1783)

τις εργασίες των Γ. Μόνζ (G. Monge, 1780, 1784/5, 1795, 1801) και Λαγκράντζ (Lagrange, 1775) ολοκληρώνεται η φάση της διαμόρφωσης της διαφορικής Γεωμετρίας ως κλάδου που έχει αντικείμενο οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες, τις οικογένειές τους (δηλαδή συνεχή σύνολα καμπυλών και επιφανειών) και τους μετασχηματισμούς τους.

Γκάσπαρντ Μόνζ (1746-1810).

Η *προβολική Γεωμετρία* έλκει την καταγωγή της στο πρώτο μισό του 17ου αι. στα έργα του Ντεζάργκ (G. Desargues, 1639) και του Πασκάλ, κατά τη μελέτη προβλημάτων απεικόνισης σωμάτων στο επίπεδο. Αντικείμενό της είναι αρχικά οι ιδιότητες των επιπέδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες όταν τα σχήματα προβάλλονται από ένα επίπεδο σε ένα άλλο. Αν και το έργο του Ντεζάργκ έτυχε καλής υποδοχής από τον Ντεκάρτ και τον Μπ. Πασκάλ, η ιδιόμορφη ορολογία του συνέτεινε στο να καθυστερήσει η αφομοίωση των ιδεών του μέχρι τις αρχές του 19ου αι. και τις εργασίες του Γάλλου μαθηματικού Ζ. Πονσελέ (J. Poncelet, 1788-1867). Ο τελευταίος ήταν μαθητής του Γκ. Μόνζ, του δημιουργού της λεγόμενης παραστατικής Γεωμετρίας, η οποία απετέλεσε τον πυρήνα της προβολικής Γεωμετρίας.

Ζάν Βίκτωρ Πονσελέ (1788-1867).

Οι απαρχές της *παραστατικής Γεωμετρίας* ανάγονται στη θεωρία της προοπτικής του 15ου-16ου αι. και στα μεταγενέστερα έργα κυρίως των Λα Ίρ (1711) και Λάμπερτ (J. Lambert, 1759). Στο έργο του Μόνζ «Παραστατική Γεωμετρία» (1799) η επιστήμη αυτή αποκτά τη σημερινή της μορφή. Στο έργο αυτό εξετάζονται οι ορθογώνιες προβολές τρισδιάστατων αντικειμένων σε δύο κάθετα επίπεδα. Κατά τις προβολές αυτές κάποιες ιδιότητες παραμένουν αναλλοίωτες και άλλες χάνονται. Για παράδειγμα, η εφαπτομένη σε μια καμπύλη προβάλλεται κατά μία ευθεία που είναι επίσης εφαπτομένη στην προβολή της καμπύλης, οι παράλληλες (ή κάθετες) ευθείες προβάλλονται κατά παράλληλες (ή κάθετες) ευθείες κτλ. Όμως, τα μήκη και οι γωνίες των σχημάτων δεν παραμένουν ίδια κατά την προβολή. Ο Πονσελέ επικέντρωσε την προσοχή του στις ιδιότητες εκείνες που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή ενός σχήματος από ένα επίπεδο σε άλλο. Το 1822 δημοσίευσε την «Πραγματεία για τις προβολικές ιδιότητες των σχημάτων», όπου αποδεικνύει ότι οι κωνικές τομές είναι προβολικά σχήματα, οπότε για τη λύση ενός προβλήματος που αφορά μια κωνική τομή μπορούμε να προβάλουμε την κωνική σε περιφέρεια, να λύσουμε το πρόβλημα για την περιφέρεια και να μεταφέρουμε τη λύση στην κωνική με την αντίστροφη προβολή.

Άρθουρ Καίλεϋ (1821-1895)

Εν μέσω έντονων συζητήσεων ανάμεσα στον Πονσελέ, τον Ζεργκόν (J.D. Gergonne, 1771-1859), τον Μαίμπιους (A.F. Möbius, 1790-1868), τον Σαλ (M. Chasles, 1793-1880) και τον Πλύκερ (J. Plücker, 1801-1868) διαμορφώνεται μια από τις θαυμαστές αρχές των Μαθηματικών – η *αρχή του δυϊσμού*. Η αρχή αυτή, όπως διατυπώνεται από τον Ζεργκόν, συσχετίζει με κάθε σημείο μία ευθεία και με κάθε ευθεία ένα σημείο έτσι ώστε:

Από δύο οποιαδήποτε σημεία άγεται μία ευθεία.	Οποιεσδήποτε δύο ευθείες έχουν κοινό σημείο.
Τρία σημεία είναι συνευθειακά, δηλαδή βρίσκονται στην ίδια ευθεία.	Τρεις ευθείες είναι συντρέχουσες, δηλαδή ανήκουν στην ίδια δέσμη.
Τρίγωνο σχηματίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία και τρεις ευθείες που τα συνδέουν ανά δύο.	Το δυϊκό σχήμα σχηματίζεται από τρεις μη συντρέχουσες ευθείες και τα τρία σημεία τομής των ευθειών αυτών ανά δύο (το σχήμα αυτό είναι επίσης τρίγωνο).

Το θαυμαστό χαρακτηριστικό της αρχής αυτής είναι ότι «μεταφράζοντας» μια απόδειξη της Γεωμετρίας και αντικαθιστώντας τη λέξη «σημείο» με τη λέξη «ευθεία», το κατηγόρημα «βρίσκεται» με το «διέρχεται», το «είναι συνευθειακά» με το «είναι συντρέχουσες» κτλ. λαμβάνουμε ένα νέο εν γένει θεώρημα. Η αρχή αυτή αντανακλά τη θεμελιακή ιδιότητα του προβολικού επιπέδου ότι οι ευθείες και τα σημεία είναι «ισότιμα» γεωμετρικά αντικείμενα.

Το 18ο αι. εμφανίζεται και *η ιδέα του πολυδιάστατου χώρου*, αρχικά αμυδρά στο φιλοσοφικό έργο του Καντ (1746). Στο θέμα αυτό επιστρέφει το 1764 ο Νταλαμπέρ όπου στο λήμμα «διάσταση» της Εγκυκλοπαίδειας *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* προτείνει να θεωρηθεί ο χρόνος ως τέταρτη διάσταση. Όμως η πολυδιάστατη αναλυτική Γεωμετρία, όπου τα σημεία ορίζονται με *ν* συντεταγμένες θεμελιώθηκε από τον Α. Καίλεϋ (Arthur Cayley, 1843). Η διανυσματική προσέγγιση της Γεωμετρίας του πολυδιάστατου χώρου, που οδήγησε αργότερα στον αξιωματικό ορισμό του διανυσματικού χώρου, αναπτύχθηκε από τον Χ. Γκράσσμαν (H. Grassman) και δέκα χρόνια αργότερα ο Ρήμαν (Riemann) εισήγαγε την ιδέα του πολυδιάστατου χώρου μεταβλητής καμπυλότητας, του λεγόμενου «Ρημάνειου χώρου».

Αν και ο κύριος όγκος της μαθηματικής έρευνας μετά τα μέσα του 17ου αι. είχε επικεντρωθεί γύρω από την Ανάλυση, στη Γεωμετρία παρατηρείται στροφή προς τα θεμέλια της κλασικής Γεωμετρίας, και συγκεκριμένα στο 5ο αίτημα των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Σε ολόκληρη τη διάρκεια του 17ου-19ου αι. οι προσπάθειες απόδειξης του αιτήματος των Παραλλήλων συνεχίζονται ανελλειπώς (Σακκέρι, Λάμπερτ, Μπερτράν, Λεζάντρ, Γκούριεφ). Οι απόπειρές τους, αν και αποδείχθηκαν άκαρπες, έδωσαν ωστόσο τη δυνατότητα στους γεωμέτρες να μελετήσουν βαθύτερα και πιο συστηματικά τις ιδιότητες του κλασικού Ευκλείδειου χώρου (βλ. *Η θεωρία των παραλλήλων*).

6. Η Γεωμετρία του 19ου αι.

Στη διάρκεια του 19ου αι. αρχίζουν να αναπτύσσονται οι πιο αφηρημένες γεωμετρικές θεωρίες που συνεχίζουν να εξελίσσονται και να εφαρμόζονται μέχρι σήμερα. Η Γεωμετρία τον αιώνα αυτό αναπτύσσεται σε τρεις βασικές κατευθύνσεις: Πρώτον, αναπτύσσονται μέθοδοι της Γεωμετρίας του συνήθους χώρου, κυρίως στο

πεδίο της διαφορικής Γεωμετρίας. Δεύτερον, διευρύνεται η έννοια του χώρου με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών. Τρίτον, παρατηρείται διείσδυση των αλγεβρικών μεθόδων στη Γεωμετρία με την ανάπτυξη της αλγεβρικής Γεωμετρίας των καμπυλών και των επιφανειών και της Γεωμετρίας των ομάδων μετασχηματισμών, που οδήγησαν τον Κλάιν στον ορισμό των διάφορων γεωμετριών ως θεωριών αναλλοίωτων ορισμένων ομάδων μετασχηματισμών. Ο 19ος αι. δύει με την αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας από τον Χίλμπερτ.

Κάρλ Φρίντριχ Γκάους (1777-1855)

Στο πεδίο της διαφορικής Γεωμετρίας δημιουργείται η διαφορική Γεωμετρία επιφανειών από τον Γκάους (K.F. Gauss, 1827), τον Μίντινγκ (E.F.A.G. Minding, 1837-40, 1830) και τον Πέτερσον (C. Peterson, 1853). Αναπτύσσεται η προβολική Γεωμετρία (Πονσελέ, Στέινερ, Στάουντ κ.ά.) και ο Χ. Γκράσσμαν κατασκευάζει την ομοπαραλληλική και τη μετρική Γεωμετρία πολυδιάστατου διανυσματικού χώρου.

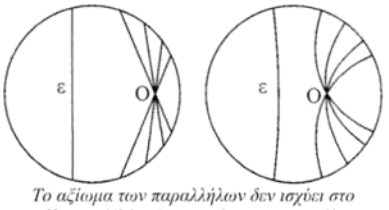
Η δημιουργία των μη Ευκλείδειων γεωμετριών. Η σημαντικότερη όμως καινοτομία του αιώνα είναι η δημιουργία των μη Ευκλείδειων γεωμετριών και η συνυφασμένη με αυτήν ιδέα για την ύπαρξη χώρων διάφορων ειδών. Αυτό οδήγησε στη διάκριση ανάμεσα στην έννοια του «μαθηματικού χώρου» και του «φυσικού χώρου».

Ήδη από τη δεκαετία του '90 του 18ου αι. ο Γκάους, ασχολούμενος με τη θεωρία των παραλλήλων, κατέληξε σε συμπεράσματα που αμφισβητούσαν την «αλήθεια» της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ωστόσο ο Γκάους δε δημοσίευσε ποτέ τις εργασίες του αυτές φοβούμενος τις αντιδράσεις που θα αντιμετώπιζαν τα συμπεράσματά του. Οι πρώτες εργασίες όπου εκτίθεται η κατασκευή μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας δημοσιεύθηκαν ανεξάρτητα η μία από την άλλη από το Ρώσο Νικολάι Ι. Λομπατσέφσκι στο «Περί των θεμελίων της Γεωμετρίας» (1829) και τον Ούγγρο Γιάνος Μπόλυαϊ (W.F. Bolyai) στο εικοσιτετρασέλιδο «Παράρτημα» του βιβλίου του πατέρα του Φαρκάς Μπόλυαϊ, που εκδόθηκε το 1832 πριν από το ίδιο το βιβλίο. Ο Λομπατσέφσκι αντικαθιστά το 5ο αίτημα του Ευκλείδη με το αξίωμα: από σημείο εκτός ευθείας άγονται τουλάχιστον δύο παράλληλοι στην ευθεία. Προσαρτώντας το αξίωμα αυτό στα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας ο Λομπατσέφσκι περιέγραψε, λογικά άψογα, έναν νέο τρισδιάστατο χώρο, διαφορετικό από τον Ευκλείδειο. Ο Λομπατσέφσκι θεωρούσε τη Γεωμετρία του ως «δυνατή» θεωρία των σχέσεων του χώρου και την ονόμασε «φανταστική Γεωμετρία». Οι τρεις βασικές ιδέες στις οποίες στηρίζεται η νέα ανακάλυψη είναι: Πρώτον, ότι μπορούμε να διανοηθούμε όχι μία, αλλά πολλές γεωμετρίες. Δεύτερον, ότι οι νέες θεωρίες μπορούν να προκύψουν με τροποποίηση και γενίκευση των αξιωμάτων της Γεωμετρίας. Τρίτον, ότι η αλήθεια της γεωμετρικής θεωρίας, με την έννοια της αντιστοιχίας της στις ιδιότητες του πραγματικού κόσμου είναι θέμα των φυσικών επιστημών.

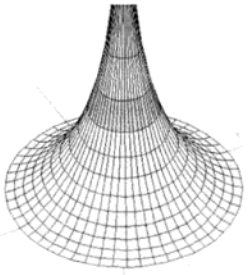
Νικολάι Λομπατσέφσκι (1793-1856).

Μοντέλα (ερμηνείες) της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι ιδέες του Λομπατσέφσκι και του Μπόλυαϊ δεν έγιναν αντιληπτές στην εποχή τους. Αν και ένα δοκίμιο του Λομπατσέφσκι δημοσιεύθηκε στα γαλλικά το 1837, η μαθηματική κοινότητα δεν ήταν έτοιμη να δεχθεί τόσο ριξικέλευθες ιδέες. Η σημασία τους απότιμήθηκε μόνον μετά το θάνατό τους, το 1868, όταν ο Ιταλός μαθηματικός Ε. Μπελτράμι (E. Beltrami, 1835-1900) στην εργασία του «Δοκίμιο περί της ερμηνείας της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας» κατασκεύασε ένα μοντέλο δισδιάστατης μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας με μέσα της τρισδιάστατης Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το μοντέλο αυτό λαμβάνεται στην εκ περιστροφής επιφάνεια της λεγόμενης *έλκουσας*[4] περί την ασύμπτωτή της και ονομάζεται *ψευδοσφαίρα*.

Όμως το μοντέλο του Μπελτράμι μας προσφέρει μια ερμηνεία μόνο της Γεωμετρίας σε ένα τμήμα του επιπέδου του Λομπατσέφσκι και όχι σε όλο το επίπεδο ή πολύ περισσότερο όχι σε όλο το χώρο. Αργότερα, το 1901 ο Ντ. Χίλμπερτ απέδειξε ότι στον Ευκλείδειο χώρο δεν υπάρχει εν γένει κανονική επιφάνεια, η Γεωμετρία στην οποία να ταυτίζεται με τη Γεωμετρία ολόκληρου του υπερβολικού επιπέδου.



Το αξίωμα των παραλλήλων δεν ισχύει στο μοντέλο του Κλάιν (αριστερά) και το μοντέλο του Πουανκαρέ (δεξιά), αφού από το «σημείο» Ο που δε βρίσκεται στην «ευθεία» ε διέρχονται οσεσδήποτε «ευθείες» που δεν τέμνουν την ε.



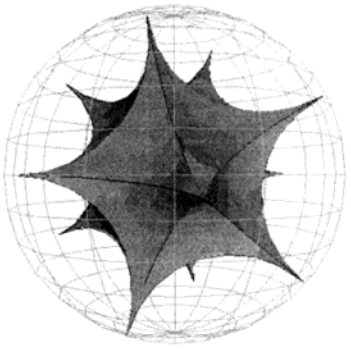
Το άνω ήμισυ της ψευδοσφαίρας. Η επιφάνεια της ψευδοσφαίρας αν και είναι άπειρη έχει περάσμενο εμβαδόν και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου πάνω σε αυτήν είναι μικρότερο του 2π.

Το 1871 ο Φ. Κλάιν, στην εργασία του «Για τη λεγόμενη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία», πρότεινε ένα μοντέλο τόσο ολόκληρου του υπερβολικού επιπέδου, όσο και του χώρου. Ως υπερβολικό επίπεδο λαμβάνεται το εσωτερικό ενός κύκλου (δηλαδή ο κυκλικός δίσκος χωρίς την περιφέρειά του). «Σημεία» του είναι τα σημεία του εσωτερικού του κύκλου, «ευθείες» οι χορδές (χωρίς τα άκρα τους). Αντίστοιχα, ως υπερβολικός χώρος μπορεί να ορισθεί το εσωτερικό σφαίρας.

Αργότερα το 1882, ο Α. Πουανκαρέ κατασκεύασε ένα άλλο μοντέλο. Ως υπερβολικό επίπεδο λαμβάνεται και πάλι το εσωτερικό ενός κύκλου αλλά ως ευθείες τα τόξα που τέμνουν την περιφέρεια του κύκλου κατά ορθή γωνία. Ανάλογα κατασκευάζεται και το μοντέλο του χώρου που είναι το εσωτερικό σφαίρας.

[4] Έλκουσα είναι η καμπύλη, που το μήκος της εφαπτομένης της (από το σημείο επαφής ως τον άξονα των τετμημένων) είναι σταθερό.

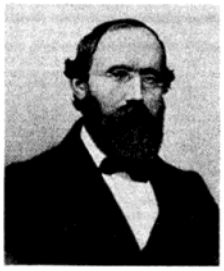
Η κατασκευή διάφορων μοντέλων της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας με μέσα της Ευκλείδειας, εκτός από το ότι προσέφερε μια εποπτική παράσταση της υπερβολικής Γεωμετρίας, απέδειξε και ότι το αίτημα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας. Όμως η θεμελιακή σημασία της ανακάλυψης της μη-Ευκλείδειας Γεωμετρίας δε συνίσταται τόσο στην απόδειξη της ανεξαρτησίας του αιτήματος των παραλλήλων, όσο στο γεγονός ότι η λογική κατασκευή μιας Γεωμετρίας είναι ανεξάρτητη από την εποπτική της παράσταση.



Κανονικό εικοσάεδρο στον υπερβολικό χώρο του μοντέλου του Πουανκαρέ.

Η γενικευμένη έννοια του μαθηματικού χώρου. Θεμελιακά νέο στάδιο στην εξέλιξη της Γεωμετρίας εγκαινιάζεται το 1854 με την περίφημη ομιλία του Ρήμαν στο Πανεπιστήμιο της Γοτίγγης (Gottingen) «Περί των υποθέσεων που αποτελούν τις βάσεις της Γεωμετρίας», όπου διατυπώνει τη γενικευμένη έννοια του μαθηματικού χώρου ως συνεχές σύνολο οποιωνδήποτε ομογενών αντικειμένων ή φαινομένων (τα οποία θεωρούνται ως σημεία του χώρου) και εισάγει την έννοια του χώρου με οποιονδήποτε κανόνα μέτρησης των μηκών με απειροστά βήματα. Αυτός ο κανόνας δίνεται με την προϋπόθεση ότι τα απειροστά τμήματα του γεωμετρικού χώρου είναι Ευκλείδεια.

Ο ορισμός αυτός αποτελεί γενίκευση της έννοιας της εσωτερικής Γεωμετρίας επιφανειών που ορίζεται από τον Γκάους ως η θεωρία των ιδιοτήτων των επιφανειών που μπορούν να αποδειχθούν με μέτρηση των μηκών των καμπυλών σε αυτές. Επίσης, ο Ρήμαν γενικεύει την έννοια του πολυδιάστατου χώρου με την έννοια του απειροδιάστατου χώρου. Οι εξελίξεις αυτές ανοίγουν νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας και δημιουργείται η λεγόμενη Ρημάνεια Γεωμετρία, η οποία βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στη θεωρία της σχετικότητας.



Μπέρνχαρντ Ρήμαν (1826-1866).

Το Πρόγραμμα του Ερλάνγκεν (Erlangen). Το 1872 στην ομιλία του «Συγκριτική επισκόπηση των νεώτερων γεωμετρικών ερευνών» στο Πανεπιστήμιο Ερλάνγκεν ο Γερμανός μαθηματικός Φ. Κλάιν (F. Klein) επιχειρεί μια ενοποίηση των διάφορων γεωμετριών (με εξαίρεση τις γεωμετρίες σε επιφάνειες μεταβλητής καμπυλότητας) με βάση την ιδέα της αναλλοίωτης σε κάποια ομάδα μετασχηματισμών.

Κατά το *Πρόγραμμα του Ερλάνγκεν* η Ευκλείδεια και η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία προτείνεται να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις της προβολικής Γεωμετρίας. Και στις

δύο περιπτώσεις το κοινό χαρακτηριστικό είναι ότι αφορούν ένα σύνολο σημείων, που λέγεται «χώρος», και μια ομάδα μετασχηματισμών που επιτρέπουν την κίνηση των σχημάτων μέσα στο χώρο χωρίς να αλλάζουν οι ουσιαστικές τους ιδιότητες. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου ως ίσα ορίζονται τα σχήματα όταν υπάρχει κίνηση (γεωμετρικός μετασχηματισμός) που να μεταφέρει το ένα επί του άλλου. Όμως μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο άλλο σύνολο γεωμετρικών μετασχηματισμών και να ορίσουμε «ίσα» τα σχήματα που λαμβάνονται το ένα από το άλλο με τη βοήθεια αυτού του νέου συνόλου των μετασχηματισμών. Έτσι ερχόμαστε στην ιδέα της «Γεωμετρίας» που εξετάζει τις ιδιότητες των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες από ένα σύνολο μετασχηματισμών. Το σύνολο των μετασχηματισμών πρέπει να αποτελεί ομάδα. Έτσι, η θεωρία που μελετά τις ιδιότητες των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες σε όλους τους μετασχηματισμούς της ομάδας, λέγεται *γεωμετρία* της ομάδας αυτής. Επιλέγοντας διαφορετικές ομάδες μετασχηματισμών λαμβάνονται διαφορετικές γεωμετρίες. Αν ως ομάδα μετασχηματισμών ληφθούν η στροφή, η συμμετρία, η παράλληλη μετατόπιση και οι συνθέσεις τους, που δεν αλλάζουν το μήκος ή τη γωνία, που είναι οι βασικές ιδιότητες στην Ευκλείδεια γεωμετρία, τότε η λαμβανόμενη Γεωμετρία είναι η Ευκλείδεια. Αν ως ομάδα ληφθούν οι προβολικοί μετασχηματισμοί που μετασχηματίζουν έναν κύκλο (ή κωνική τομή) στον εαυτό του, τότε η λαμβανόμενη Γεωμετρία είναι η υπερβολική. Έτσι, οι διάφορες γεωμετρίες έχουν διαφορετικούς χώρους και διαφορετικές ομάδες μετασχηματισμών, και τα σχήματα έχουν διαφορερικές βασικές ιδιότητες.

Η αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας. Η γενική τάση για αυστηρότητα στα Μαθηματικά που σημειώνεται στο δεύτερο μισό του 19ου αι. και η λύση του προβλήματος των παραλλήλων έθεσαν το πρόβλημα της έρευνας ολόκληρου του συστήματος των αξιωμάτων της Γεωμετρίας (βλ. *Η αξιωματική μέθοδος*). Οι έρευνες αυτές έδειξαν ότι το σύστημα των αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν είναι πλήρες. Έτσι ο Μ. Πας (M. Pasch, 1843-1930) κατασκεύασε το 1882 ένα σύστημα αξιωμάτων για τις σχέσεις μεταξύ σημείων, ευθύγραμμων τμημάτων και τμημάτων του επιπέδου και διατύπωσε επίσης αξιώματα διάταξης και ισοδυναμίας (συμπεριλαμβανομένου και του αξιώματος του Αρχιμήδη). Όμως το σύστημα των αξιωμάτων του Πας είναι αρκετά σύνθετο, επειδή λαμβάνει ως αρχικά αντικείμενα πεπερασμένα τμήματα της ευθείας και του επιπέδου και όχι ολόκληρη την ευθεία ή το επίπεδο.

Το 1899 ο Ιταλός μαθηματικός Μ. Πιερί (M. Pieri) πρότεινε ένα άλλο επίσης πολύ σύνθετο σύστημα αξιωμάτων με δύο μόνον αρχικά αντικείμενα: το σημείο και την κίνηση.

Το κλασικό σήμερα σύστημα αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προτάθηκε, ταυτόχρονα με το σύστημα του Πιερί, από τον Ντ. Χίλμπερτ στο έργο του «Τα θεμέλια της Γεωμετρίας». Το σύστημα αυτό αίρει τις δυσκολίες του συστήματος του Πας λαμβάνοντας ως αρχικά αντικείμενα το σημείο, την ευθεία και το επίπεδο, τα οποία απαιτείται να ικανοποιούν κάποια αξιώματα (βλ. *Η αξιωματική μέθοδος*). Κατά την αξιωματική προσέγγιση του Χίλμπερτ (και του Πας) δεν απαιτείται να διευκρινιστεί η φύση των αρχικών αντικειμένων, δηλαδή τι είναι σημείο, ευθεία ή επίπεδο. Το μόνο που υποθέτουμε είναι ότι αυτά ικανοποιούν τις σχέσεις που διατυπώνονται στα αξιώματα. Για το λόγο αυτό η Ευκλείδεια Γεωμετρία του Χίλμπερτ επιτρέπει διαφορετικές συγκεκριμένες ερμηνείες, ανάλογα με τη φύση των αρχικών αντικειμένων στα οποία εφαρμόζεται.

Στον 20ο αι., παρά τον υψηλό βαθμό αφαίρεσης των Μαθηματικών, η Γεωμετρία παραμένει βασική πηγή ανάπτυξης της πλούσιας και γόνιμης μαθηματικής διαίσθησης. Οι περισσότεροι μαθηματικοί σκέπτονται και σήμερα με γεωμετρικά σχήματα και

παραστάσεις, ακόμα και όταν παρουσιάζουν τα τελικά τους αποτελέσματα με αναλυτική μορφή, καταπνίγοντας έτσι τα ίχνη της γεωμετρικής τους εποπτείας στα άδυτα των τύπων.

5. Χρήση των ιστορικών σημειωμάτων

Η εισαγωγή της ιστορίας των Μαθηματικών στα διδακτικά βιβλία της Β/βμιας εκπαίδευσης είναι ασαφής και αόριστη για πολλούς εκπαιδευτικούς. Σύμφωνα με μια άποψη, η ιστορία των Μαθηματικών θεωρείται ίσως χρήσιμη επειδή μπορεί να παρακινήσει τους λιγότερο ικανούς στα μαθηματικά μαθητές με την αφήγηση ανεκδόταν γύρω από ιστορικά πρόσωπα, θρύλων γύρω από την ανακάλυψη μεγάλων θεωρημάτων ή ακόμα και να τονώσει τα αισθήματα νοσταλγίας για τους χρυσούς αιώνες και τα επιτεύγματα των προγόνων μας. Στο πλαίσιο αυτό, τα ιστορικά σημειώματα περιορίζονταν συνήθως στην ασφυκτικά συνοπτική ιστορία της απόδοσης της πατρότητας μιας ανακάλυψης και τη χρονολογική παράθεση γεγονότων, χωρίς να εξετάζεται γιατί οι άνθρωποι ασχολήθηκαν με τα προβλήματα που λύνουν τα Μαθηματικά και τι σημαίνει η λύση τους για τα υπόλοιπα πεδία των Μαθηματικών και της γνώσης.

Το θέμα της αξιοποίησης της ιστορίας στα μαθήματα Μαθηματικών τα τελευταία χρόνια έχει γίνει πλέον αντικείμενο συστηματικών μελετών. Στις ΗΠΑ, π.χ. η Μαθηματική Εταιρεία χρηματοδοτείται από το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών (National Science Foundation) για την ανάπτυξη του Ινστιτούτου Ιστορίας των Μαθηματικών και της Αξιοποίησής της στη Διδασκαλία (Institute in the History of Mathematics and its Use in Teaching), το οποίο έχει ως στόχο να αυξήσει την παρουσία της ιστορίας στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών.

Ακολουθώντας τις διεθνείς εξελίξεις το βιβλίο του μαθητή παρουσιάζει μια σειρά ιστορικών σημειωμάτων στα οποία επιχειρείται να δοθεί ακριβής (αν και όχι διεξοδική) περιγραφή του προβλήματος που τέθηκε και των εννοιολογικών εργαλείων που εφαρμόστηκαν για να λυθεί. Επικεντρώνεται η προσοχή σε διαδικασίες γένεσης νέων μαθηματικών ιδεών (π.χ. η γένεση των μη Ευκλείδειων γεωμετριών, της αξιωματικής μεθόδου κτλ.) ή αλλαγής των αντιλήψεων των ίδιων των μαθηματικών για τις έννοιες και τις μεθόδους που χρησιμοποιούσαν. Θίγεται επίσης το θέμα της διάδοσης των μαθηματικών εννοιών ανάμεσα σε διαφορετικές μαθηματικές και πολιτισμικές παραδόσεις και άλλα.

Είναι προφανές ότι τα σημειώματα αυτά δεν μπορούν να είναι ολοκληρωμένες μελέτες πάνω στα θέματα που θίγονται. Ούτε είναι δυνατόν να δοθούν διεξοδικές οδηγίες για την αξιοποίηση του ιστορικού υλικού