Θεώρημα

Ο π είναι άρρητος.

Απόδειξη

Έστω ότι $\pi=\dfrac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha,\ \beta \in N$. Ορίζουμε τη συνάρτηση f: $f(x)=\dfrac{x^n(\alpha-\beta x)^n}{n!}$,

όπου το n θα το διαλέξουμε παρακάτω. Προφανώς $f\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-x\right)=f(x)$, δηλαδή

$f(\pi-x)=f(x)$.

Ορίζουμε νέα συνάρτηση F σαν:

$$F(x)=f(x)-f^2(x)+f^4(x)-.....+(-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Το n! f(x) έχει ακέραιους συντελεστές και είναι της μορφής $A_1x^{2n}+A_2x^{2n-1}+...+A_{n+1}x^n \quad (A_\kappa \in Z)$, οπότε τα $f(x)$, $f'(x)$, $f^{(2)}(x),...,f^{(2n)}(x)$, είναι, για x=0, όλοι ακέραιοι αριθμοί. Όμοια, θα είναι ακέραιοι αριθμοί και για x=π, αφού $f(\pi-x)=f(x) \quad \Rightarrow \quad f(\pi)=f(0)$.

Μετά από απλές πράξεις, που τις παραλείπουμε, αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{d}{dx}\Big(F'(x)\,\eta\mu x-F(x)\,\sigma\upsilon\nu x\Big)=F''(x)\,\eta\mu x-F(x)\,\eta\mu x=f(x)\,\eta\mu x$$

άρα

$$\int_0^\pi f(x)\ \eta\mu x dx=\Big[F'(x)\,\eta\mu x-F(x)\,\sigma\upsilon\nu x\Big]_0^\pi$$

$$=F(\pi)+F(0)=\text{ακέραιος}\ +\ \text{ακέραιος}$$

$$=\text{ακέραιος}$$

Απ' την άλλη όμως για $0\ <\ x\ <\ \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(=\pi)$ έχουμε :

$$0\ <\ f(x)\,\eta\mu x\ \leq\ \frac{x^n(\alpha-\beta x)^n}{n!}\ \leq\ \frac{\pi^n\,\alpha^n}{n!}$$

οπότε $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\eta\mu x dx\ \leq\ \frac{\pi^n\alpha^n}{n!}\pi$.

Αφού όμως η ακολουθία $\dfrac{c^n}{n!}$ συγκλίνει στο 0, θα έχουμε για κατάλληλα μεγάλο

n :

$$0\ <\ \int_0^\pi f(x)\,\eta\mu x dx\ \leq\ \frac{\pi^n\alpha^n}{n!}\pi\ <\ 1$$

$\Rightarrow\quad 0\ <\ \text{ακεραίου}\ <\ 1$ που είναι άτοπο .

[Περιοδικό «Θεαίτητος» 1993 , Μιχ. Λάμπρου]