1. **Απαγωγή σε άτοπο** *

Θέλοντας να δείξουμε ότι η ισχύς της πρότασης P συνεπάγεται την ισχύ της πρότασης Q, υποθέτουμε ότι ισχύει η άρνηση της Q (ακριβώς αντίθετη της Q) και με μία σειρά συλλογισμών ή πράξεων καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα (αποτέλεσμα) το οποίο είναι μαθηματικά αδύνατο (άτοπο).
Έτσι δεν είναι δυνατόν να ισχύει η άρνηση της Q, αλλά η ίδια η Q.

Άσκηση 1

Σε ένα διεθνές καλοκαιρινό μαθηματικό σχολείο συμμετείχαν συνολικά 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Δείξτε ότι υπάρχει αποστολή μιας χώρας στην οποία υπάρχουν τουλάχιστον 12 μαθητές του ίδιου φύλου.

Λύση

Πρόταση P : 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες.
Πρόταση Q: τουλάχιστον 12 παιδιά του ίδιου φύλου.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η αντίθετη της Q : έστω δηλαδή ότι υπάρχουν το πολύ 11 μαθητές του ίδιου φύλου από κάθε χώρα.
Τότε όμως συνολικά θα υπήρχαν το πολύ $(11+11)\cdot 9=198$ μαθητές, άτοπο αφού γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 199 .

Άσκηση 2

Δείξτε ότι δεν υπάρχει πάρτυ στο οποίο καθένας από τους καλεσμένους να έχει διαφορετικό (μπορεί και μηδέν) πλήθος γνωστών .

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι κάτι τέτοιο είναι δυνατό . Έστω ότι υπάρχουν ν καλεσμένοι.
Τότε τα διαφορετικά πλήθη γνωστών θα είναι 0,1,2,….., ν-1 .
Δηλαδή ο 1^{ος} θα έχει 0 γνωστούς,
ο 2^{ος} θα έχει 1 γνωστό
ο 3^{ος} θα έχει 2 γνωστούς
……………..
……………..
ο ν^{ος} θα έχει (ν-1) γνωστούς.

Τότε όμως ο ν^{ος} θα γνωρίζει όλους τους υπόλοιπους , άρα και τον 1^{ο} που όμως δεν γνωρίζει κανέναν . Άτοπο .

2. **Διάψευση με αντιπαράδειγμα** *

Θέλοντας να διαψεύσουμε τον ισχυρισμό μιας πρότασης, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα το οποίο να ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης, αλλά όχι το συμπέρασμά της . Το παράδειγμα αυτό λέγεται αντιπαράδειγμα .

Άσκηση 3

Αν ισχύει $\alpha^4 < \beta^4$ τότε είναι $\alpha<\beta$.
Συνθήκες πρότασης : $\alpha^4 < \beta^4$. Συμπέρασμα : $\alpha<\beta$.
Η πρόταση αυτή είναι λανθασμένη διότι π.χ. έχουμε $-3<2$ αλλά $(-3)^4 > 2^4$, αφού $81>16$.

3. **Υπαρξιακή απόδειξη**

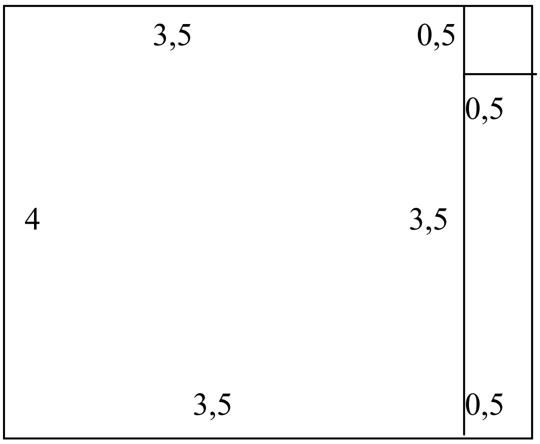
Κάποιες προτάσεις ισχυρίζονται την ύπαρξη ενός μαθηματικού φαινομένου ή κατάστασης κάτω από ορισμένες συνθήκες. Η απόδειξη αυτή τότε εμπεριέχει την κατασκευή αυτού του φαινομένου ή κατάστασης.

Άσκηση 4

Μπορούμε να χωρίσουμε ένα τετράγωνο με πλευρά 4 cm σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα, των οποίων το άθροισμα των περιμέτρων τους να είναι 25 cm **;**

Λύση

Η απάντηση είναι καταφατική .



Το διπλανό σχήμα παρουσιάζει την ύπαρξη ενός τέτοιου χωρισμού.
(Δύο ορθογώνια και ένα τετράγωνο)
Άθροισμα περιμέτρων :
$2\cdot(3{,}5+4)+2\cdot(3{,}5+0{,}5)+4\cdot 0{,}5 = 15+8+2=25$

4. **Απόδειξη με απαρίθμηση**

Σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατό να αποδείξουμε μια πρόταση απαριθμώντας τις περιπτώσεις που εμπεριέχει.

Άσκηση 5

Αποδείξτε ότι ο αριθμός 7942518632 δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Κάθε ακέραιος λήγει σε 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 άρα το τετράγωνό του
λήγει σε : 0 , 1 , 4 , 9 , 6 , 5 , 6 , 9 , 4 , 1 δηλαδή σε 0,1,4,5,6,9.
Επομένως είναι αδύνατο να υπάρχει ακέραιος x ώστε : $x^2 = 7942518632$

5. **Ευθεία απόδειξη** *

Αρχίζοντας από την πρόταση P και μέσω μιας αλυσίδας συλλογισμών ή πράξεων της μορφής «εάν…..τότε….» , φθάνουμε στην πρόταση Q , οπότε P συνεπάγεται την Q .

Άσκηση 6

Η κάθε πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου έχει μήκος β , ενώ το καθένα από τα τρία ίσα ύψη του έχει μήκος h . Αποδείξτε ότι $3\beta^2 = 4h^2$.

Λύση

Κάθε ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο είναι διάμεσος και διχοτόμος. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ένα από τα δύο ίσα ισοσκελή τρίγωνα που σχηματίζονται ,

έχουμε : $\beta^2 = (\frac{\beta}{2})^2 + h^2 \Rightarrow \beta^2 = \frac{\beta^2}{4} + h^2$

$\Rightarrow \beta^2 - \frac{\beta^2}{4} = h^2 \Rightarrow \frac{3\beta^2}{4} = h^2 \Rightarrow 3\beta^2 = 4h^2$