

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΤΑΞΗ : Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΘΕΜΑ 1ο

A. Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  αποδείξτε ότι  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$  (M8)

B. α) Τι ονομάζεται συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ; (M4)

β) Τι παριστάνει γεωμετρικά το σύμβολο  $|x - y|$  αν  $x, y$  τυχαίοι διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί; (M3)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) (M 2 x 5 = 10)

α) Αν  $x, y \in \mathbb{R}$  με  $x \cdot y \geq 0$  τότε ισχύει  $|x + y| = |x| + |y|$

β) Ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης

γ) Αν για την διακρίνουσα  $\Delta$  του τριωνύμου  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  ( $a \neq 0$ ), είναι  $\Delta > 0$ , τότε το  $f(x)$  γίνεται ομόσημο του  $a$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει  $(-2013)^{2013} > (-2013)^4$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x)$  και  $-f(x)$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .

ΘΕΜΑ 2ο

A. α) Να λυθεί η ανίσωση  $|x| > 3$  (M3)

β) Να λυθεί η ανίσωση  $|3 - x| \leq 1$  (M5)

γ) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων. (M5)

B. Αποδείξτε ότι  $\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} = -(1+\sqrt{3})^2$  (M12)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  με  $a \cdot b \cdot \gamma \neq 0$ ,  $a \neq b$ ,  $\beta^2 + a \cdot \gamma = 0$

A. Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο πραγματικές και διαφορετικές ρίζες. (M6)

B. Αποδείξτε ότι οι παραπάνω ρίζες είναι ετερόσημες. (M3)

Γ. Αν  $S, P$  είναι το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών, αποδείξτε ότι  $\frac{-\beta \cdot S + \gamma \cdot P}{a} + 2 \cdot P \cdot S \geq 0$  (M7)

Δ. Υποθέτουμε τώρα ότι  $\gamma = -\alpha > 0$ . Τότε αποδείξτε :

Δ1)  $\beta = -\alpha$  (M2)

Δ2) Επιλύστε την ανίσωση  $f(x) < 0$  (M7)

#### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ ,  $g(x) = k^3 - kx^2$ ,  $k > 0$

A. Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  (M6)

B. Αποδείξτε ότι η  $C_f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (M2)

Γ. Βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης  $C_g$  με τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  καθώς και τα διαστήματα στα οποία αυτή βρίσκεται κάτω από τον  $x'x$ . (M8)

Δ. Υποθέτουμε τώρα ότι για τους πραγματικούς αριθμούς  $\xi, \lambda$  ισχύουν οι σχέσεις  $|\xi - 5| = 5 - \xi$  και  $|-3\lambda + 6| \leq 0$ . Τότε :

Δ1) Βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκονται τα σημεία  $\Sigma(\xi - 7, \lambda^2 - 3)$  (M6)

Δ2) Υπολογίστε το  $\xi$  αν γνωρίζουμε ότι το σημείο  $M(5, -1)$  είναι συμμετρικό του  $\Sigma$  ως προς την αρχή των αξόνων. (M3)