

ΘΕΜΑΤΑ

**ΘΕΜΑ Α**

**A1)** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$  με  $A^2+B^2-4\Gamma > 0$  παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (M10)

**A2)** Τί ονομάζουμε παραβολή με διευθετούσα την ευθεία  $\delta$  και εστία ένα σημείο  $E$  εκτός της ευθείας  $\delta$ ; (M5)

**A3)** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με  $\Sigma$  αν είναι σωστή ή με  $\Lambda$  αν είναι λανθασμένη.

**α.** Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι αριθμός μικρότερος της μονάδας.

**β.** Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  έχουν εξίσωση της μορφής  $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

**γ.** Κάθε διάμετρος μιας έλλειψης είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από τον μεγάλο άξονα της έλλειψης.

**δ.** Όσο μεγαλύτερη είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής, τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης της.

**ε.** Η ευθεία  $y = 3x-5$  σχηματίζει με τον άξονα των  $x'$   $x$  αμβλεία γωνία. (M 2-2-2-2-2)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η έλλειψη  $x^2 + 5y^2 = 20$ .

**α)** Να βρεθούν οι εστίες, τα μήκη των αξόνων και η εκκεντρότητα. (M8)

**β)** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων και της οποίας η εστία συμπίπτει με την μία εστία  $E$  της παραπάνω έλλειψης που βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα. (M6)

**γ)** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραπάνω παραβολής που διέρχονται από την άλλη εστία  $E'$  της έλλειψης (του αρνητικού ημιάξονα) και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες. Επίσης να βρεθούν τα σημεία της παραβολής έστω  $M, M'$  στα οποία έχουμε φέρει αυτές τις εφαπτόμενες. (M 7 + 4)

**ΘΕΜΑ Γ.** Δίνεται η εξίσωση  $2(\kappa+1)^2 \cdot x + (\kappa^2 - \kappa) \cdot y + (3\kappa+1) = 0$  (1),  $\kappa \in \mathbb{R}$  και η ευθεία

$$(\delta) : 4x + 2y - 2013 = 0$$

**Γ1)** Αποδείξτε ότι για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$  η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία  $(\epsilon_\kappa)$ . (M6)

**Γ2)** Αποδείξτε ότι όλες οι ευθείες  $(\epsilon_\kappa)$  διέρχονται από ένα σταθερό σημείο του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες. (M7)

**Γ3)** Βρείτε την τιμή του  $\kappa$  και την εξίσωση της ευθείας  $(\epsilon_\kappa)$  που είναι παράλληλη προς την ευθεία  $(\delta)$ . (M6)

**Γ4)** Υπολογίστε την απόσταση των παραλλήλων ευθειών του προηγούμενου ερωτήματος. (M6)

### **ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1)** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου  $(C_1)$  που έχει κέντρο το σημείο  $K(-2,0)$  και εφάπτεται του άξονα  $y'y$ . (M4)

**Δ2)** Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που διέρχονται από το σημείο  $\Lambda(2,0)$  και εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου  $(C_1)$  είναι σημεία ενός κλάδου μιας υπερβολής  $(C_2)$ . (4M) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής  $(C_2)$  είναι  $3x^2 - y^2 = 3$ . (M5)

**Δ3)** Να βρείτε τη εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής  $(C_2)$ . (6M)

**Δ4)** Έστω  $M(x_1, y_1)$  σημείο της υπερβολής  $(C_2)$  με  $y_1 \neq 0$ . Αν η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $N$  να δείξετε ότι  $d(N, MK) = d(N, M\Lambda)$ . (6M)

ΟΙ

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ο

ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΣΩΤΗΡΗΣ ΣΚΟΤΙΔΑΣ

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΛΙΤΣΙΟΣ

ΘΩΜΑΣ ΣΙΑΦΑΚΑΣ