

**ΘΕΜΑ Α**

A₁. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ ($\rho \in \mathbb{R}$) αν και μόνον αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του $P(x)$. (M10)

A₂. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ; (M5)

A₃. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) : (M10)

α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = a^x$ ($0 < a \neq 1$) και $g(x) = \log_a x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

β) Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει το πολύ μία ρίζα σε αυτό το διάστημα.

γ) Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = 2^{x-3}$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της $f(x) = 2^x$ κατά μία οριζόντια μετατόπιση 3 μονάδων προς τα αριστερά.

ε) Αν $0 < a < 1$ και $0 < x < 1$ τότε ισχύει $\log_a x < 0$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2kx}{x^2 + k^2}$, $k \neq 0$

B₁. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή (M7)

B₂. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της είναι 1 και να βρείτε την τιμή του x για την οποία αυτή επιτυγχάνεται. (M7)

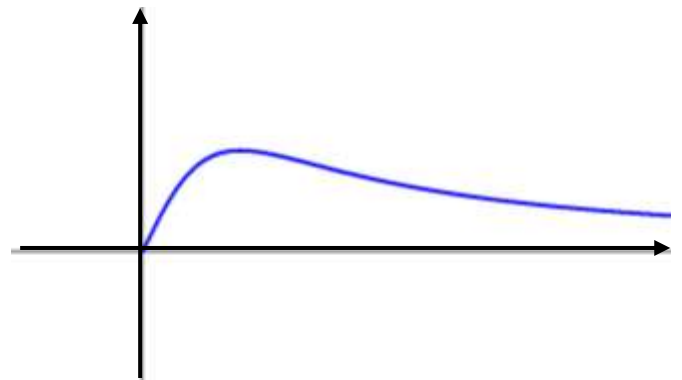
B₃. Στο διπλανό σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της f για $k = 1$, αλλά μόνο για $x \geq 0$.

Να μεταφέρετε το σχήμα στο γραπτό σας συμπληρώνοντάς όλη τη γραφική παράσταση.

(M3)

B₄. Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = k(x^2 + k^2)f(x) - 2013$

(M8)



ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + mx^2 - 2x - 6$, $m \in \mathbb{R}^*$

α) Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 2)$ (M8)

β) Να βρεθεί η τιμή του m για την οποία η προηγούμενη διαίρεση είναι τέλεια. (M2)

γ) Για την προηγούμενη τιμή του m , να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$ (M6)

Γ₂. Προσδιορίστε όλα τα πολυώνυμα $F(x)$ 2ου βαθμού ώστε $F(0) = 0$ και $F(x) - F(x - 2) = 4x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(M9)

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$, $g(x) = \ln(e^x + 2)$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f, g (M4)

β) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\ln 2)$, $g(-1)$ (M4)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $x + f(x) = \ln 2 + g(x)$ (M7)

Δ₂. Να λυθεί η εξίσωση $x^{\frac{5+\log x}{3}} = 100^{5+\log x}$ (M10)