

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥΘΕΜΑΤΑ

1. A. Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $x_1x + y_1y = \rho^2$ (M 10)

B. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις : (M 5 x 2)

α) Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$

β) Στην έλλειψη, όσο μεγαλώνει ο λόγος b/a τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη

γ) Η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν

δ) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$

ε) Οι ευθείες με εξίσωση $y = 2x + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) είναι παράλληλες

Γ. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες E' και E ; (M 5)

2. Σημείο M βρίσκεται επί της ευθείας $(\epsilon) : 5x - 12y + 23 = 0$ και σημείο N βρίσκεται επί του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

a) Βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου

b) Υπολογίστε την απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ϵ)

c) Βρείτε την ελάχιστη τιμή της μεταβλητής απόστασης (MN)

3. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (k, k\sqrt{3})$, $k > 0$ και διάνυσμα \vec{b} που ικανοποιεί τη σχέση

$$|m\vec{a} + f\vec{b}| = |f\vec{a} + m\vec{b}|, \text{ όπου } m, f \in \mathbb{R}^* \text{ με } |m| \neq |f|.$$

A) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του \vec{a} , το $|\vec{a}|$ και την γωνία (\vec{a}, Ox) (M 2+2+2)

β) Αποδείξτε ότι $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ (Μ 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, τότε

Γ1) να βρεθεί ο αριθμός $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (Μ 6)

Γ2) Να βρεθεί το διάνυσμα $\text{προβ}_a \vec{b}$ (Μ 6)

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (3x-12, 5y+9)$ και $\vec{v} = (3x+12, 5y-9)$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

Αν $\vec{u} \perp \vec{v}$

α) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου είναι έλλειψη (C), με εξίσωση

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \text{ Να βρείτε τις εστίες } E, E' \text{ και την εκκεντρότητα της έλλειψης. (Μ 6+6)}$$

β) Αν $K(x_1, y_1)$ είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης (C), να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε), της έλλειψης, στο σημείο K. (Μ 2)

γ) Αν για το σημείο $K(x_1, y_1)$ της έλλειψης (C), ισχύει $|x_1| \neq 5$ και $x_1 \neq 0$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί τη γωνία EKE' (Μ 5)

δ) Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{w} = \frac{\overrightarrow{KE}}{|\overrightarrow{KE}|} - \frac{\overrightarrow{KE'}}{|\overrightarrow{KE'}|}$ είναι παράλληλο προς την εφαπτομένη (ε) της έλλειψης (C) στο σημείο K. (Μ 6)

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΛΙΤΣΙΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΒΛΑΧΟΘΑΝΑΣΗ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ

ΣΙΑΦΑΚΑΣ ΘΩΜΑΣ

ΣΚΟΤΙΔΑΣ ΣΩΤΗΡΙΟΣ