

ΘΡΙΑΙΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ 16/10/2012 (ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 55 min)

ΕΠΩΝΥΜΟ: ΟΝΟΜΑ: ΤΜΗΜΑ: Γ' ΘΕΤΙΚΗ

ΘΕΜΑΤΑ1ο ΘΕΜΑ

A. Αποδείξτε ότι για τυχαίους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει η ισότητα $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (M2)

B. Οι εικόνες των μιγαδικών a, b, c είναι μη συνευθειακά σημεία. Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι ισότητες $|z - a| = |z - b| = |z - c|$; (M1)

Γ. Έστω $M(z_1), N(z_2)$ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 , όπου $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ και $z_1, z_2 \notin i$. Αν ισχύει η σχέση $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, αποδείξτε ότι η ευθεία MN διέρχεται από την αρχή O των αξόνων. (M3)

Δ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις: (M2)

α) Αν $z \notin \mathbb{R}, z \notin i$ τότε οι εικόνες των $z, -z, \overline{z}, -\overline{z}$ είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου

β) Αν η εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}^*$) έχει αρνητική διακρίνουσα, τότε στο σύνολο C θα έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

γ) Ισχύει πάντοτε $\text{Im}(z_1 \cdot z_2) = \text{Im}(z_1) \cdot \text{Im}(z_2)$

δ) Το μέτρο του αθροίσματος δύο μιγαδικών ισούται πάντοτε με το άθροισμα των μέτρων τους.

2ο ΘΕΜΑ

Οι μιγαδικοί z ικανοποιούν τη σχέση $|z + iz - 1| \leq \sqrt{2}$

a) Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z (M3)

b) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της παράστασης $|z - i|$ (M2)

3ο ΘΕΜΑ

Οι μιγαδικοί z ικανοποιούν τη σχέση $|z + 4i| + |\overline{z} + 4i| = 10$.

a) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων τους (M2)

b) Υπολογίστε $|z + 4\overline{z}|$ (M1)

4ο ΘΕΜΑ

Για τους μη μηδενικούς και διαφορετικούς ανά δύο μιγαδικούς z_1, z_2, z_3, z_4 ισχύουν οι (τέσσερις) σχέσεις $|w - z_k| = |z_k|$, $k = 1, 2, 3, 4$ όπου $w = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$

a) Αποδείξτε ότι $w = 0$ (M2)

b) Υποθέτουμε ότι επιπλέον ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$. Αποδείξτε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (M2)