Γεωμετρία

1. Θεώρημα Steiner : ν συνεπίπεδες ευθείες χωρίζουν το επίπεδο το πολύ σε $\frac{\nu^2+\nu+2}{2}$ μέρη.

2. Θεώρημα Euler : Αν Ο το περίκεντρο και Ι το έγκεντρο ενός τριγώνου τότε $\mathrm{OI}=\sqrt{R^2-2R\rho}$ όπου R , ρ οι ακτίνες του περιγεγραμμένου , εγγεγραμμένου κύκλου (αντίστοιχα) του τριγώνου.

3. Θεώρημα Pompeiu : Έστω ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο και P σημείο στο επίπεδο του τριγώνου. Τότε τα τμήματα PA , PB , PΓ είτε αποτελούν πλευρές τριγώνου, είτε το μεγαλύτερο από αυτά ισούται με το άθροισμα των άλλων δύο.

4. Θεώρημα Πτολεμαίου : Αν ΑΒΓΔ τετράπλευρο τότε ισχύει ΑΒ · ΓΔ + ΒΓ · ΑΔ $\geq$ ΑΓ · ΒΔ . Το ίσον ισχύει αν και μόνο αν το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

5. Θεώρημα Μενελάου : Αν μια ευθεία δ τέμνει τις πλευρές ΑΒ , ΒΓ , ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία Δ , Ε , Ζ αντίστοιχα, τότε ισχύει $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E\Gamma}}\cdot\frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{ZA}}=1$.

6. Θεώρημα Ceva : Αν από τις κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τρεις ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο και τέμνουν τις πλευρές ΑΒ , ΒΓ , ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία Δ , Ε , Ζ αντίστοιχα, τότε ισχύει $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E\Gamma}}\cdot\frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{ZA}}=1$.

7. Ευθεία Euler : Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ το ορθόκεντρο Η , το βαρύκεντρο Θ και το περίκεντρο Ο είναι σημεία συνευθειακά και μάλιστα ισχύει ΗΘ = 2ΘΟ.

8. Κύκλος Euler : Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ τα μέσα των πλευρών του , τα ίχνη των υψών του και τα μέσα των τμημάτων που συνδέουν το ορθόκεντρο με τις κορυφές του τριγώνου, ανήκουν σε έναν κύκλο ο οποίος έχει κέντρο Ω το μέσο της «ευθείας Euler» δηλαδή του τμήματος ΗΟ και ακτίνα R/2 όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου (κύκλος των 9 σημείων ή αλλοιώς κύκλος του Feuerbach).

Θεωρία Αριθμών

1. (Μικρό Θεώρημα του Fermat) : Έστω α ένας θετικός ακέραιος και p ένας πρώτος.

   Τότε ισχύει $a^p \equiv a \bmod p$.

   Αν μάλιστα Μ.Κ.Δ.(α , p) =1 τότε ισχύει $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

(**σ.σ.** $a \equiv b \bmod c \Leftrightarrow c \mid (a-b) \Leftrightarrow a-b=kc$, δηλαδή οι a , b αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο αν διαιρεθούν με τον c .)

2. (Θεώρημα Euler – Fermat) : Ονομάζουμε φ(m) = το πλήθος των στοιχείων του συνόλου {1 , 2 , ……., m} που είναι πρώτοι προς τον m. Αν Μ.Κ.Δ.(α , m) =1 τότε ισχύει

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$$

Ανισότητες

1. Ανισότητα Cauchy

$$\left(x_1y_1+x_2y_2+....+x_ny_n\right)^2 \le \left(x_1{}^2+x_2{}^2+...+x_n{}^2\right)\left(y_1{}^2+y_2{}^2+...+y_n{}^2\right)$$

2. Ανισότητα Αριθμητικού – Γεωμετρικού Μέσου (γενικευμένη)

$$w_1a_1+w_2a_2+....+w_na_n \ge a_1{}^{w_1}\cdot a_2{}^{w_2}\cdot ......\cdot a_n{}^{w_n}$$ όπου οι

$w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί με άθροισμα 1 .

Ειδική περίπτωση είναι η παρακάτω

$$\left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^n \ge a_1\cdot a_2\cdot ....\cdot a_n$$ η οποία προκύπτει για

$$w_1=w_2=...=w_n=\frac{1}{n}$$

3. <u>Ανισότητα του Schur</u>

$x^n(x-y)(x-z)+y^n(y-z)(y-x)+z^n(z-x)(z-y)\geq 0$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x , y , z και φυσικό n≥0.

4. <u>Ανισότητα Holder</u>

Αν a_i, b_i είναι μη αρνητικοί αριθμοί και αν p , q είναι θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ τότε

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^{pq}\leq\left(a_1{}^p+a_2{}^p+\ldots.+a_n{}^p\right)^q\left(a_1{}^q+a_2{}^q+\ldots.+a_n{}^q\right)^p$$

<u>Νόμος των συνημιτόνων</u>

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{A}$$

<u>Νόμος των Ημιτόνων</u>

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{b}{\eta\mu B}=\frac{c}{\eta\mu C}=2R$$

<u>Διωνυμικό Θεώρημα</u>

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k$$ όπου $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ με n! = 1·2·….·n