Βασικές Ανισότητες

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

$a^3+b^3 \ge ab(a+b)$

$a^5+b^5 \ge a^2b^2(a+b)$

Εφαρμογές

1. Αν x , y w θετικοί αποδείξτε ότι $xyw \le \dfrac{x^4+y^4+w^4}{x+y+w}$ *(Poland Olympiad)*

2. Αν α , b , c θετικοί αποδείξτε ότι $\left(a^3+b^3+abc\right)^{-1}+\left(b^3+c^3+abc\right)^{-1}+\left(c^3+a^3+abc\right)^{-1} \le (abc)^{-1}$

(U.S.A. Olympiad)

3. Αν α , b , c θετικοί και abc=1 , αποδείξτε ότι $\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}+\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}+\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1$

(Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, Shortlist – 1996)

Ανισότητα των Μέσων (AM – GM – HM)

Αν $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu$ θετικοί πραγματικοί τότε ισχύει

$$\frac{a_1+a_2+\ldots.+a_\nu}{\nu} \ge \sqrt[\nu]{a_1a_2\ldots.a_\nu} \ge \frac{\nu}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_\nu}}$$

Εφαρμογές

4. Αν α,β,γ >0 ν.δ.ο. $\left(\alpha+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma+\dfrac{\alpha}{\alpha\beta}\right) \ge 8$

5. Αν α,β,γ >0 ν.δ.ο. $\dfrac{\alpha}{\beta^3}+\dfrac{\beta}{\gamma^3}+\dfrac{\gamma}{\alpha^3} \ge \dfrac{27}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$

Ανισότητα BCS

$$\left(a_1^{\;2}+a_2^{\;2}+\ldots+a_\nu^{\;2}\right)\left(b_1^{\;2}+b_2^{\;2}+\ldots+b_\nu^{\;2}\right) \ge \left(a_1b_1+a_1b_2+\ldots+a_\nu b_\nu\right)^2$$

Εφαρμογές

6. $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{3}{2}$ όπου α , β , γ >0

7. Αν α , β , γ , δ θετικοί αριθμοί , ν.δ.ο. $(1+\alpha^4)(1+\beta^4)(1+\gamma^4)(1+\delta^4)\geq(1+\alpha\beta\gamma\delta)^4$

Ανισότητα Andreescu

Αν $x_1,x_2,...,x_v\in R$ και $a_1,a_2,....,a_v>0$ τότε ισχύει

$$\frac{x_1{}^{\mu}}{a_1}+\frac{x_2{}^{\mu}}{a_2}+...+\frac{x_v{}^{\mu}}{a_v}\geq\frac{\left(x_1+x_2+...+x_v\right)^{\mu}}{v^{\mu-2}(a_1+a_2+...+a_v)}$$

Το ίσον ισχύει αν και μόνον αν $x_1=x_2=...=x_v$, $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_v$

Εφαρμογή

8. Αν α , β , γ θετικοί με αβ+βγ+γα=1/3 αποδείξτε ότι

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1}\geq\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Ανισότητα Tschebychev

Αν οι ακουλουθίες $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_v$ και $\beta_1,\beta_2,...\beta_v$ έχουν ίδια διάταξη τότε ισχύει

$$\frac{a_1+a_2+....+a_v}{v}\cdot\frac{b_1+b_2+...+b_v}{v}\leq\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_vb_v}{v}$$ ενώ αν οι παραπάνω ακολουθίες έχουν αντίθετη διάταξη , τότε η ανισότητα έχει αντίστροφη φορά.

Εφαρμογή

9. Αν x , y , w θετικοί αποδείξτε ότι $3\left(x^3+y^3+w^3\right)\geq\left(x+y+w\right)\left(xy+yw+wx\right)$

Ανισότητα Holder

1η μορφή

$$\left(a^{\mu}+\beta^{\mu}+\gamma^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\left(x^{v}+y^{v}+w^{v}\right)^{\frac{1}{v}}\geq ax+\beta y+\gamma w$$ το ίσον αν και μόνον αν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{w}$

2η μορφή

$$\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^{p}\left(\kappa+\lambda+\mu\right)^{q}\left(x+y+w\right)^{r}\geq a^{p}\kappa^{q}x^{r}+\beta^{p}\lambda^{q}y^{r}+\gamma^{p}\mu^{q}w^{r}$$ όπου

P , q , r θετικοί με p + q + r = 1 .

Εφαρμογή

10. Αν a , b , c και x , y , w είναι θετικοί αριθμοί , αποδείξτε ότι $\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{w} \geq \frac{\left(a+b+c\right)^3}{3(x+y+w)}$

(Λευκορωσία, 2000)

Ανισότητα των δυνάμεων

Αν $a_1, a_2, ..., a_v > 0$ και κ≥μ τότε $\sqrt[k]{\frac{a_1{}^k + a_2{}^k + ... + a_v{}^k}{v}} \geq \sqrt[\mu]{\frac{a_1{}^\mu + a_2{}^\mu + ... + a_v{}^\mu}{v}}$

Εφαρμογή

11. Αν a , b θετικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$

(Τσεχία – Σλοβακία, 2000)

Ανισότητα του Schur

$$\alpha^\lambda(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+\beta^\lambda(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+\gamma^\lambda(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\geq 0$$

όπου λ>0 και α , β , γ ≥0

Εφαρμογή

12. Αν α , β , γ ≥ 0 , αποδείξτε ότι $α^3+β^3+γ^3+5αβγ \geq (α+β)(β+γ)(γ+α)$