2ο ΓΕΛ ΚΑΡΔΙΤΣΑΣ | Α | ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΩΡΙΑΙΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΕΠΩΝΥΜΟ: ……………………………………………………………………… ΟΝΟΜΑ: ………………………………………………………ΗΜΕΡ/ΝΙΑ: 19/12/2012

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για τα μη μηδενικά και κάθετα διανύσματα $\vec{u},\vec{v} \nparallel y'y$ αποδείξτε ότι ισχύει η σχέση $\lambda_{\vec{u}}\cdot\lambda_{\vec{v}}=-1$ *(Μ3)*

Β. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις : *(Μ 4 x 0,5)*

α) Για μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}$ ισχύει $\left[\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\vec{\gamma}\right]\vec{\delta}=\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\left(\vec{\gamma}\vec{\delta}\right)$.

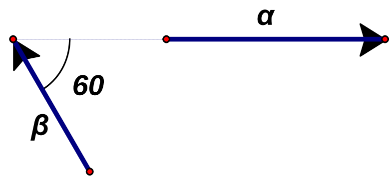
β) Για μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει $\dfrac{\left(\vec{\beta}\vec{\gamma}\right)^2}{\vec{\beta}^2}=\dfrac{\vec{\beta}^2\vec{\gamma}^2}{\vec{\beta}^2}=\vec{\gamma}^2$

γ) Για μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}$ με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 0$ ισχύει $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\delta}\Rightarrow\vec{\gamma}=\vec{\delta}$

δ) Για μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

Γ. Αν για τα μη συγγραμμικά και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta}$ ισχύει $\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}-\left|\vec{\alpha}\right|\right)\vec{\alpha}=\left(2-\left|\vec{\beta}\right|\right)\vec{\beta}$, να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ *(Μ 2,5)*

Δ. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\left|\vec{\alpha}\right|=3,\ \left|\vec{\beta}\right|=2$, να βρεθεί το $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$ *(Μ2)*



Ε. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$; *(Μ2)*

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\dfrac{1}{\left|\vec{\beta}\right|}$ όπου $\varphi=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ και

$$\left(\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}+\frac{3}{2\left|\vec{\alpha}\right|}\cdot\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\alpha}=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2.$$

Α. Αποδείξτε ότι $\left|\vec{\alpha}\right|=\frac{1}{2}$ *(Μ 3,5)*

Β. Αποδείξτε ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}$ *(Μ2)*

Γ. Υπολογίστε το $\left|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\right|$ *(Μ1)*

Δ. Αν η γωνία $\left(\widehat{\vec{\beta},\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}}\right)$ είναι $\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το $\left|\vec{\beta}\right|$. *(Μ2)*

2^{o} ΓΕΛ ΚΑΡΔΙΤΣΑΣ | Β | ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΩΡΙΑΙΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΕΠΩΝΥΜΟ: ………………………………………………………………………… ΟΝΟΜΑ: ………………………………………………………ΗΜΕΡ/ΝΙΑ: 19/12/2012

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Για τα μη μηδενικά και κάθετα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ // γ΄γ αποδείξτε ότι ισχύει η σχέση $\lambda_{\vec{u}}\cdot\lambda_{\vec{v}}=-1$

(Μ3)

Β. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις : *(Μ 4 x 0,5)*

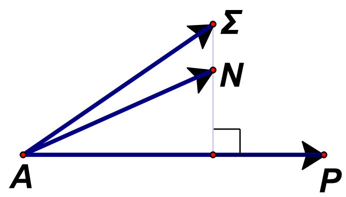
α) Για μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}$ ισχύει $\left[\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\vec{\gamma}\right]\vec{\delta}=\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\left(\vec{\gamma}\vec{\delta}\right)$.

β) Για μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει $\dfrac{\left(\vec{\beta}\vec{\gamma}\right)^2}{\vec{\beta}^2}=\dfrac{\vec{\beta}^2\vec{\gamma}^2}{\vec{\beta}^2}=\vec{\gamma}^2$

γ) Για μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}$ με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 0$ ισχύει $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\delta}\Rightarrow\vec{\gamma}=\vec{\delta}$

δ) Για μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

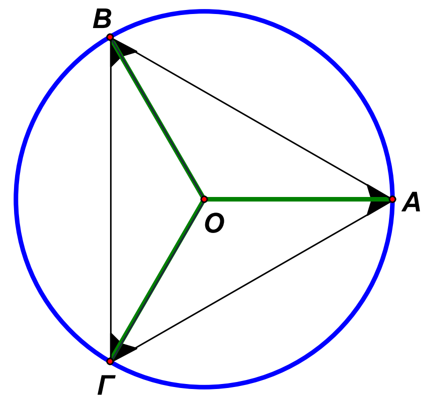
Γ. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ *ισχύει* $\pi\rho o\beta_{\vec{a}}\vec{b}=\vec{0}$, τότε τι προκύπτει για τα $\vec{a},\vec{b}$; *(Μ2)*



Δ. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ΣΝ είναι κάθετη στην ΑΡ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι ισχύει η σχέση $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Sigma}}>\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AN}}$. Έχει δίκιο; Εξηγείστε. *(Μ2)*

Ε. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$; *(Μ2)*

ΘΕΜΑ 2^{o}



Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{0}$, όπου Ο(0,0) και $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|=1$, δηλαδή τα σημεία Α,Β,Γ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1.

Α) Αποδείξτε ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}}\right)=120^0$. Τι προκύπτει ανάλογα; *(Μ2)*

Β) Τι τρίγωνο είναι το ΑΒΓ; Γιατί; Υπολογίστε το $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$. Ποιο το μήκος της πλευράς ΑΒ ; *(Μ2)*

Γ) Έστω Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου του κύκλου. Με την βοήθεια της σχέσης $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leq\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\leq\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$ αποδείξτε ότι

Γ1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\geq 1-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ *(Μ2)*

Γ2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}\right|\geq 3$ *(Μ2)*

Δ) Αν είναι $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=(k,p)$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ *(Μ1)*