Ο αριθμός e είναι άρρητος

Απόδειξη

Δεν είναι άγνωστο ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ επομένως $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\dots$ και ότι $2 < e < 3$.

Έστω ότι ο αριθμός e ήταν ρητός, δηλαδή $e = \frac{m}{n}$ όπου m , n σχετικά πρώτοι.

Θεωρούμε τον αριθμό $k = n!\left[e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\dots + \frac{1}{n!}\right)\right] = n!\frac{m}{n} - n! - \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} - \dots\dots - \frac{n!}{n!}$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός k είναι ακέραιος ως άθροισμα ακεραίων (θυμίζουμε ότι $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\dots \cdot n$)

Από την άλλη όμως

$$k = n!\left|e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots\dots + \frac{1}{n!}\right)\right| = n!\left|\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots\dots\right| =$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\dots\dots < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots\dots$$

$$\underline{\underline{\text{άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας γ.π.}}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < 1$$

Ώστε $0 < k < 1$. Αλλά ο αριθμός k είναι ακέραιος. ΑΤΟΠΟ.