Θεώρημα I:

Το εμβαδό ενός τετραγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς του.

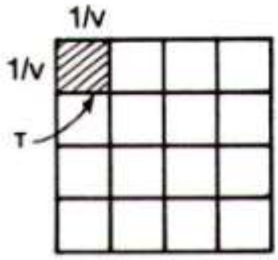
Δηλαδή, το εμβαδό Ε ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς α ($\alpha \in R^*_+$) είναι:

$$\boxed{E = \alpha^2}$$

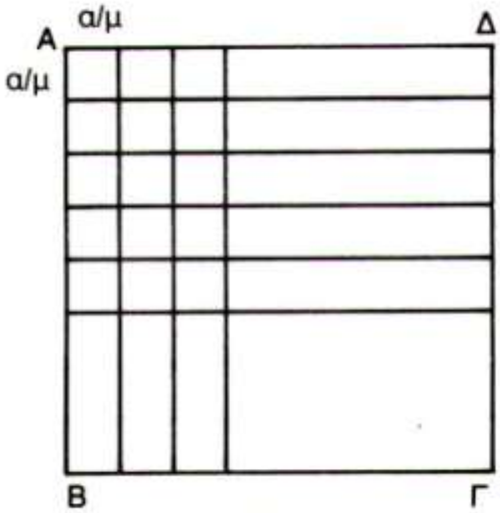
* **Απόδειξη.** Έστω ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με μήκος πλευράς α. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, καθόσον ο αριθμός α είναι ή ρητός ή άρρητος.

Περίπτ. (i): Έστω ότι ο θετικός αριθμός α είναι ρητός (σχ.1).

Τότε $\alpha = \dfrac{\mu}{\nu}$ όπου $\mu, \nu \in N^*$.

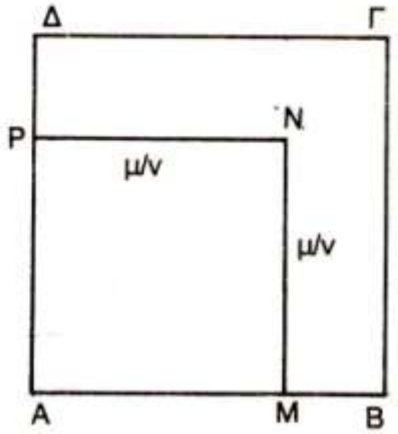


Θεωρούμε ένα τετράγωνο Τ με πλευρά 1 και διαιρούμε καθεμιά από τις πλευρές του σε ν ίσα τμήματα. Συνδέοντας τα αντίστοιχα σημεία διαίρεσης των απέναντι πλευρών, το τετράγωνο Τ χωρίζεται σε ν^2 ίσα τετράγωνα, που το καθένα έχει πλευ-ρά 1/ν. Αν τ είναι ένα από αυτά, τότε κατά το αξίωμα του εμβαδού $(T) = \nu^2(\tau)$ και επειδή $(T) = 1$, βρίσκουμε $1 = \nu^2(\tau)$ ή $(\tau) = 1/\nu^2$ (1). Διαιρούμε τώρα καθεμιά από τις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ σε μ ίσα τμήματα και συνδέουμε τα αντίστοιχα σημεία διαίρεσης των απέναντι πλευρών. Τότε καθένα από τα μ^2 τετράγωνα, στα οποία χωρίζεται το ΑΒΓΔ, έχει πλευρά $\dfrac{1}{\mu}\alpha = \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{\mu}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}$, δηλαδή είναι ίσο προς το τ. Έτσι, έχουμε $(ΑΒΓΔ) = \mu^2(\tau)$ και, λόγω της (1), $(ΑΒΓΔ) = \mu^2 \cdot \dfrac{1}{\nu^2} = \left(\dfrac{\mu}{\nu}\right)^2$, οπότε τελικά $(ΑΒΓΔ) = \alpha^2$.



Σχ.1

Περίπτ. (ii). Έστω ότι ο α είναι άρρητος (σχ.2). Θεωρούμε ένα τετράγωνο ΑΜΝΡ με πλευρά $\frac{\mu}{\nu}<\alpha$, όπου $\mu,\nu\in N^*$, ώστε τα Μ,Ρ να είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως. Τότε το ΑΜΝΡ περιέχεται στο ΑΒΓΔ και επομένως (ΑΜΝΡ)<Ε, όπου Ε=(ΑΒΓΔ). Αλλά $(AMNP)=\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2$ (περίπτ. (i)), οπότε $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2<E$ ή $\frac{\mu}{\nu}<\sqrt{E}$



Σχ. 2

Αποδείχτηκε έτσι ότι για κάθε ρητό $\frac{\mu}{\nu}$ ισχύει: Αν $\frac{\mu}{\nu}<\alpha$, τότε είναι και $\frac{\mu}{\nu}<\sqrt{E}$ (1) Ομοίως Αν $\frac{\mu}{\nu}>\alpha$, τότε είναι και $\frac{\mu}{\nu}>\sqrt{E}$ (2)

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ρητός μεταξύ των $\sqrt{E}$ και α και άρα $\sqrt{E}=\alpha(^*)$, απ' όπου έχουμε $(AB\Gamma\Delta)=\alpha^2$.