Επίλυση τριτοβάθμιας εξίσωσης

$x^3+rx^2+sx+t=0$ ***(1)*** Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x=y-\frac{r}{3}$ η ***(1)*** γίνεται

$y^3+py+q=0$ ***(2)*** με $p=s-\frac{r^2}{3}$, $q=\frac{2}{27}r^3-\frac{rs}{3}+t$

Εκτελώντας την αντικατάσταση $y=w-\frac{p}{3w}$ καταλήγουμε στην $w^6+qw-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ ***(3)***

που είναι δίκυβη και λύνεται με την ανατικατάσταση $w^3=z$ και βρίσκουμε τις ρίζες z_1 , z_2 .

Τώρα πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις $w^3=z_1$, $w^3=z_2$.

Οι ρίζες της πρώτης είναι οι w_1 , $w_1\varepsilon$, $w_1\varepsilon^2$ και της δεύτερης οι w_2 , $w_2\varepsilon$, $w_2\varepsilon^2$ όπου ε , ε^2 οι μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας

Έτσι, οι αντίστοιχες τιμές του y είναι :

$$y_1=w_1-\frac{p}{3w_1}\ ,\ y_2=w_1\varepsilon-\frac{p}{3w_1\varepsilon}\ ,\ y_3=w_1\varepsilon^2-\frac{p}{3w_1\varepsilon^2}$$

$$y_1'=w_2-\frac{p}{3w_2}\ ,\ y_2'=w_2\varepsilon-\frac{p}{3w_2\varepsilon}\ ,\ y_3'=w_2\varepsilon^2-\frac{p}{3w_2\varepsilon^2}$$

Αποδεικνύεται ότι αυτές οι ρίζες είναι ανά δύο ίδιες. Πράγματι :

από τους (γενικευμένους) τύπους του Vieta , έχουμε

$$z_1z_2=-\left(\frac{p}{3}\right)^3 \Rightarrow z_2=-\frac{p^3}{27z_1} \Rightarrow w_2{}^3=-\frac{p^3}{27w_1^3} \Rightarrow w_2=-\frac{p}{3w_1}$$ και τότε

$$y_1'=w_2-\frac{p}{3w_2}=-\frac{p}{3w_1}-\frac{p}{3\left(-\frac{p}{3w_1}\right)}=-\frac{p}{3w_1}+w_1=y_1$$

Έτσι οι ρίζες της ***(2)*** είναι οι $w-\frac{p}{3w}$, $w\varepsilon-\frac{p}{3w\varepsilon}$, $w\varepsilon^2-\frac{p}{3w\varepsilon^2}$ όπου w η πρωτεύουσα ρίζα της $w^3=z$ και z μια ρίζα της $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$.