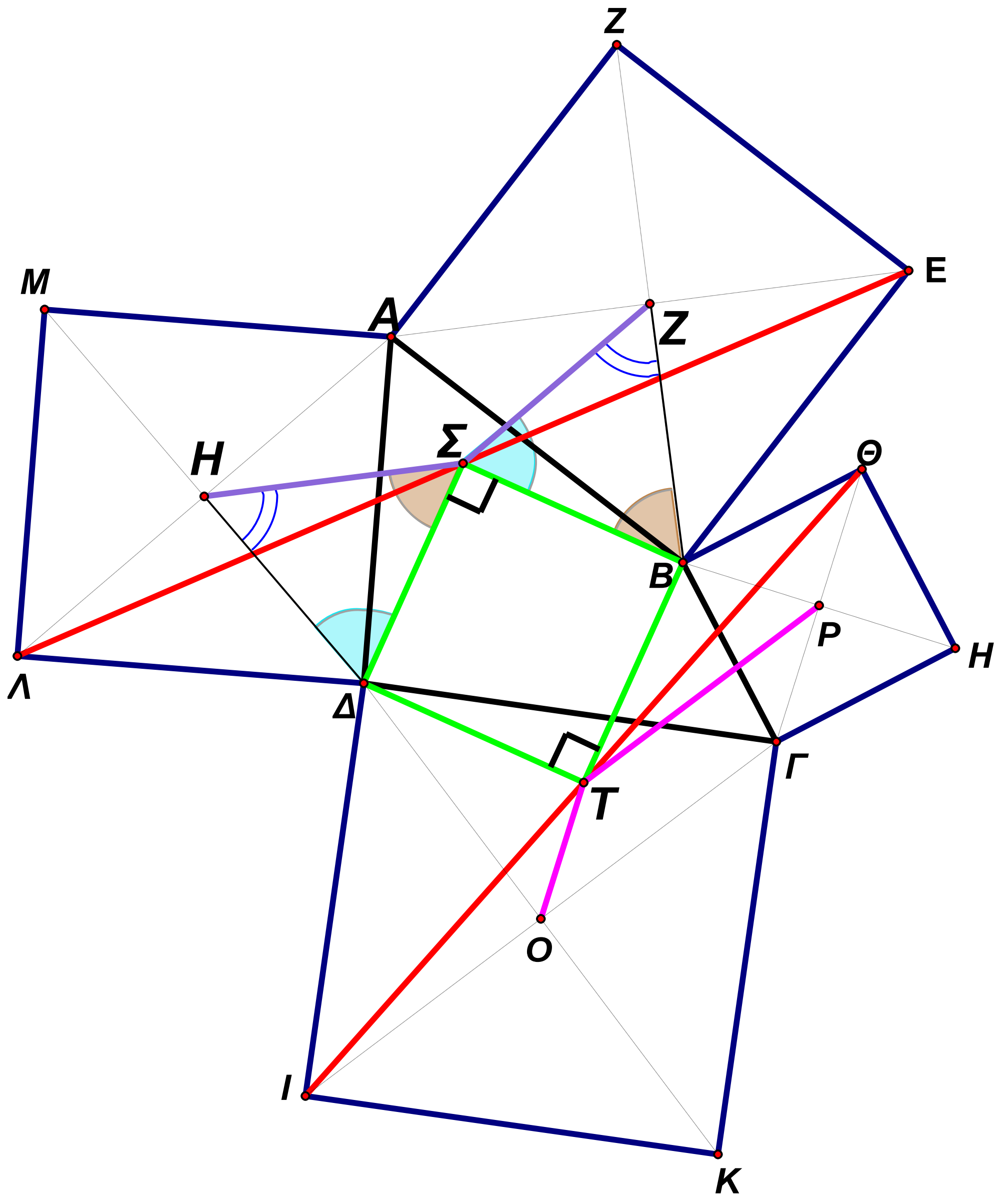
# ***ΘΕΜΑΤΑ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ***

Παραθέτω κάποια παλιά θέματα εισαγωγικών εξετάσεων Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Δυστυχώς σήμερα κάποιοι «σοφοί» έχουν εξοστρακίσει το πανέμορφο αυτό μάθημα που προάγει την μαθηματική σκέψη από τις Πανελλήνιες Εξετάσεις, αντικαθιστώντας το με την Ανάλυση που διδάσκεται με τελείως στρεβλό τρόπο (και φυσικά καταστρέφουν και αυτό το μάθημα). Οι προτεινόμενες λύσεις είναι δικές μου. Τα σχήματα έγιναν με το Geometer's Sketchpad.

***1.*** Επί των πλευρών τετραπλεύρου ***ΑΒΓΔ*** και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ***ΑΒΕΖ , ΓΔΙΚ , ΒΓΗΘ, ΔΑΜΛ.*** Αν ***Σ*** και ***Τ*** τα μέσα των ***ΕΛ , ΙΘ*** αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ***ΒΤΔΣ*** είναι τετράγωνο.

***(Εισαγωγικές Εξετάσεις Αρχιτεκτόνων Θεσσαλονίκης, 1961)***

*Προτεινόμενη Λύση*




Αν Ζ , Η τα κέντρα των τετραγώνων ΑΒΕΖ , ΑΔΛΜ αντίστοιχα, τότε έχουμε

$$\Sigma Z \overset{//}{=} \frac{A\Lambda}{2} = AH = H\Delta$$

$$H\Sigma \overset{//}{=} \frac{AE}{2} = AZ = ZB$$

$$\Sigma ZB = 90^0 - AZ\Sigma =$$

$$= 90^0 - AH\Sigma = \Sigma H\Delta$$

Έτσι τα τρίγωνα ΗΣΔ , ΖΣΒ είναι ίσα (Π-Γ-Π).

Οπότε **ΣΒ = ΣΔ** .

Όμως είναι και **ΣΒ** $\perp$ **ΣΔ** διότι

$$H\Sigma Z = 180^0 - AH\Sigma =$$

$$= 180^0 - (90^0 - \Sigma H\Delta) =$$

$$90^0 + \Sigma H\Delta$$

οπότε :

$$B\Sigma\Delta = 360^0 - (H\Sigma\Delta + Z\Sigma B + H\Sigma Z) = 360^0 - (H\Sigma\Delta + Z\Sigma B + \Sigma H\Delta + 90^0) =$$

$$360^0 - (180^0 + 90^0) = 90^0$$

Εντελώς ανάλογα αποδεικνύουμε ότι **ΤΒ = ΤΔ** και **ΤΒ** $\perp$ **ΤΔ** . (από ισότητα των τριγώνων ΔΟΤ , ΒΡΤ)

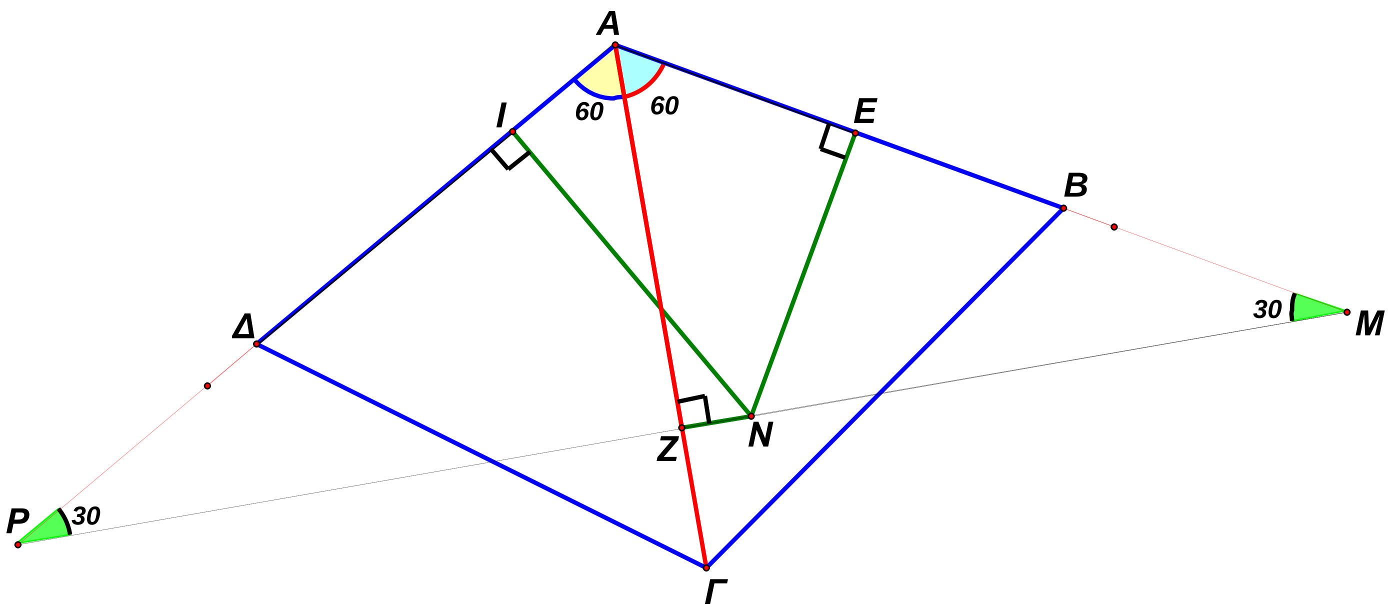
Τότε όμως τα τρίγωνα ΒΣΔ και ΒΤΔ είναι ίσα, διότι έχουν κοινή την ΒΔ και τις προσκείμενες γωνίες ίσες με $45^0$ την κάθε μία, αφού καθένα από τα ΒΣΔ και ΒΤΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Άρα ΣΒ = ΣΔ = ΒΤ = ΤΔ δηλαδή ΒΣΔΤ ρόμβος και με μια γωνία ορθή θα είναι τετράγωνο.

***2.*** Σε τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** είναι $\mathrm{B}\mathrm{A}\Gamma = \Gamma\mathrm{A}\Delta = 60^0$ και **Ν** τυχαίο εσωτερικό σημείο της γωνίας $\mathrm{B}\mathrm{A}\Gamma$. Αν **ΝΕ , ΝΖ , ΝΙ** οι αποστάσεις του **Ν** από τις ευθείες **ΑΒ , ΑΓ , ΑΔ** αντίστοιχα, αποδείξτε ότι

**ΝΕ + ΝΖ = ΝΙ.** ***(Πολυτεχνείο Αθηνών, Αλλοδ. Τοπογρ. 1957)***

*Προτεινόμενη Λύση*




Προεκτείνουμε την ΖΝ μέχρι να τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΔ , ΑΒ , έστω στα σημεία Ρ , Μ .

Τότε το τρίγωνο ΑΡΜ είναι ισοσκελές και Ζ μέσο ΡΜ. Από την γνωστή ιδιότητα καθέτου πλευράς ορθογωνίου τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία $30^0$ , έχουμε :

ΝΖ = ΝΡ – ΡΖ = 2ΝΙ – ΖΜ = 2ΝΙ – (ΝΖ + ΝΜ) = 2ΝΙ – ΝΖ – 2ΝΕ $\Rightarrow$ 2ΝΖ + 2ΝΕ = 2ΝΙ $\Rightarrow$ <u>ΝΖ + ΝΕ = ΝΙ</u>

.

***3***. Επί των πλευρών ΑΒ , ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε εκτός αυτού τα τετράγωνα ΑΓΖΗ , ΑΒΔΕ. Να αποδειχθεί ότι :

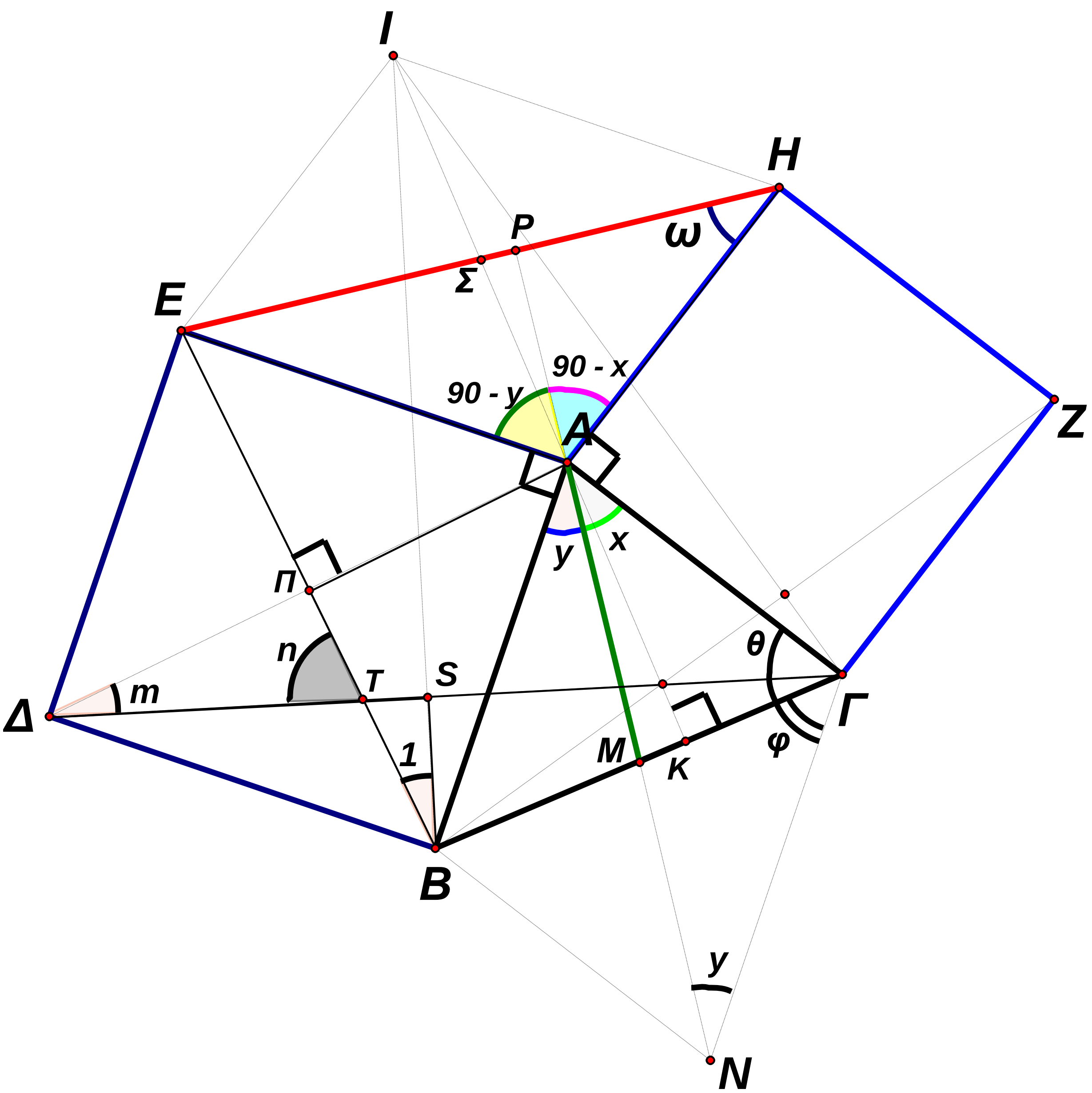
a) Η διάμεσος από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετη στην ΕΗ

b) Το από την κορυφή Α ύψος του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από την κορυφή Ι του παραλληλογράμμου ΕΑΗΙ

c) Τα τμήματα ΔΓ , ΒΖ είναι ίσα και κάθετα με τα τμήματα ΒΙ , ΓΙ αντίστοιχα και μάλιστα τέμνονται επί του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ που άγεται από την κορυφή Α.

***(Γεωπονική Αθηνών 1948 – Ευελπίδων 1955 – Αρχιτεκτόνων Αθηνών 1962, Ολυμπιάδα Ισπανίας 1990)***

*Προτεινόμενη Λύση*




**a)** Προεκτείνοντας την ΑΜ κατά τμήμα ΜΝ = ΑΜ δημιουργούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΝΓ και έστω ότι η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΗ στο Ρ. Αν $\mathrm{M}\mathrm{A}\Gamma = x$ , $\mathrm{MAB} = y$, τότε $\mathrm{PAH} = 90^0 - x$ , $\mathrm{PAE} = 90^0 - y$. Στο τρίγωνο ΑΓΝ , έχουμε $\theta + \varphi + x + y = 180^0 \Rightarrow \theta + \varphi = 180^0 - (x + y)$ ,άρα $\mathrm{A}\Gamma\mathrm{N} = \mathrm{EAH}$ .

Έτσι τα τρίγωνα ΑΓΝ , ΕΑΗ είναι ίσα,(Π-Γ-Π) οπότε $\omega = \mathrm{EHA} = \mathrm{MA\Gamma} = x$. Έτσι

$\mathrm{PAH} + \omega = (90^0 - x) + x = 90^0$, άρα $\mathrm{APH} = 90^0$.

**b)** Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΕΑΗΙ και έστω ότι η προέκταση της ΑΙ τέμνει την ΒΓ στο Κ. Έστω Σ το μέσο της ΕΗ. Από την προηγούμενη ισότητα των τριγώνων του ερωτήματος **a)** προκύπτει ότι ΑΝ = ΕΗ , άρα ΑΜ = ΣΗ. Έτσι τα τρίγωνα ΣΑΗ , ΑΜΓ είναι ίσα, (Π-Γ-Π) οπότε $\mathrm{AM\Gamma} = \mathrm{A\Sigma H}$. Τότε έχουμε

$\mathrm{AMK} + \mathrm{MAK} = \mathrm{A\Sigma P} + \mathrm{\Sigma AP} = 90^0$, άρα και $\mathrm{AKM} = 90^0$.

**c)** Παρατηρούμε ότι $\mathrm{BA\Gamma} = 180^0 - \mathrm{EAH} = \mathrm{IEA}$ και έτσι τα τρίγωνα ΕΙΒ , ΑΔΓ είναι ίσα διότι έχουν ΙΕ = ΑΓ , ΒΕ = ΑΔ , $\mathrm{IEB} = 45^0 + \mathrm{IEA} = 45^0 + \mathrm{BA\Gamma} = \Delta\mathrm{A\Gamma}$, άρα $B_1 = m$. Αλλά $m + n = 90^0$. Έτσι $TSB = 90^0$.

Ανάλογα για τις ΒΖ , ΙΓ.

Είναι πλέον φανερό ότι οι ΒΖ , ΓΔ , ΙΚ είναι φορείς των υψών στο τρίγωνο ΙΒΓ , άρα συντρέχουν.

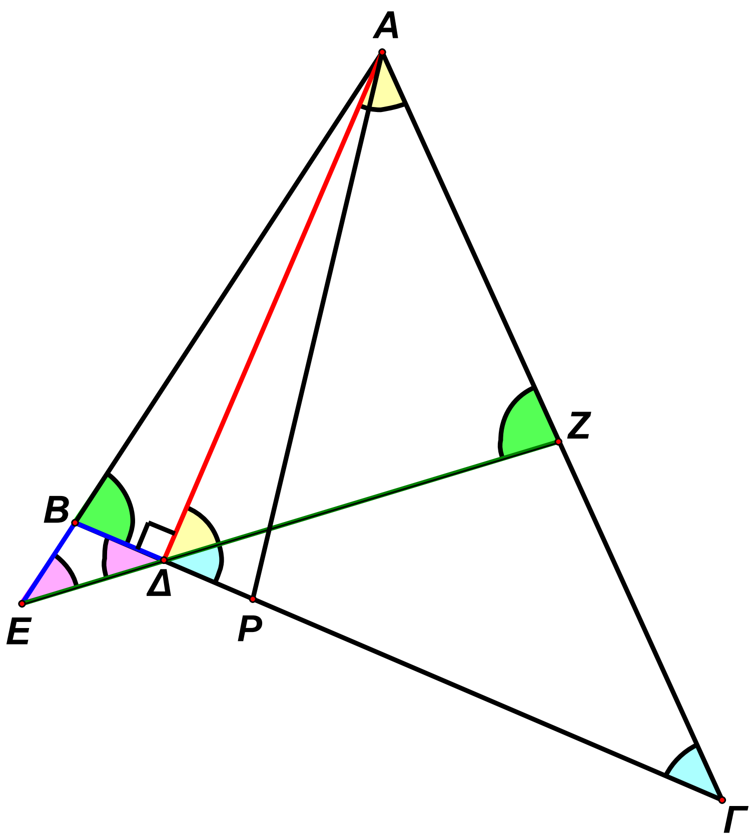
**4.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $\mathrm{B} = 2\Gamma$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΔ. Αποδείξτε ότι :

a) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΖ έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες

b) Αν Ζ το σημείο τομής των ΑΓ και ΔΕ , αποδείξτε ότι το Ζ ισαπέχει από τα Α , Δ , Γ.

c) ΑΒ = ΔΓ – ΔΒ **(Πολυτεχνείο Αθηνών, Χημικοί 1960)**

*Προτεινόμενη Λύση*




**a)** Αφού ΒΕ=ΒΔ θα είναι $\mathrm{B\Delta E} = \mathrm{BE\Delta} = \theta$, τότε $\mathrm{AB\Gamma} = 2\theta$ ως εξωτερική στο τρίγωνο ΒΕΔ. Αλλά $\mathrm{AB\Gamma} = 2\Gamma$ και $\mathrm{B\Delta E} = \mathrm{Z\Delta\Gamma}$ (κατακ) οπότε $\Gamma = \mathrm{E} = \mathrm{Z\Delta\Gamma} = \theta$.

Έτσι τα τρίγωνα ΑΒΓ , ΑΕΖ έχουν $\mathrm{BA\Gamma}$ κοινή , $\Gamma = \mathrm{E}$ , $\mathrm{AB\Gamma} = \mathrm{AZE}$

**b)** $\mathrm{A\Delta Z} = 90^0 - \theta = 90^0 - \Gamma = \mathrm{\Delta A\Gamma}$, άρα ΑΖ = ΔΖ, ενώ ήδη γνωρίζαμε ότι ΔΖ = ΖΓ.

**c)** Βρίσκουμε το συμμετρικό του Β ως προς το Δ, έστω Ρ. Τότε του τρίγωνο ΑΒΡ είναι ισοσκελές , οπότε $\mathrm{APB} = \mathrm{AB\Gamma} = 2\theta$.

Όμως $\mathrm{APB} = \Gamma + \mathrm{PA\Gamma}$ , δηλαδή

$2\theta = \theta + \mathrm{PA\Gamma} \Rightarrow \theta = \mathrm{PA\Gamma} \Rightarrow \mathrm{P\Gamma} = \mathrm{PA}$

Έτσι, ΑΒ = ΑΡ = ΡΓ = ΔΓ – ΔΡ = ΔΓ – ΔΒ.

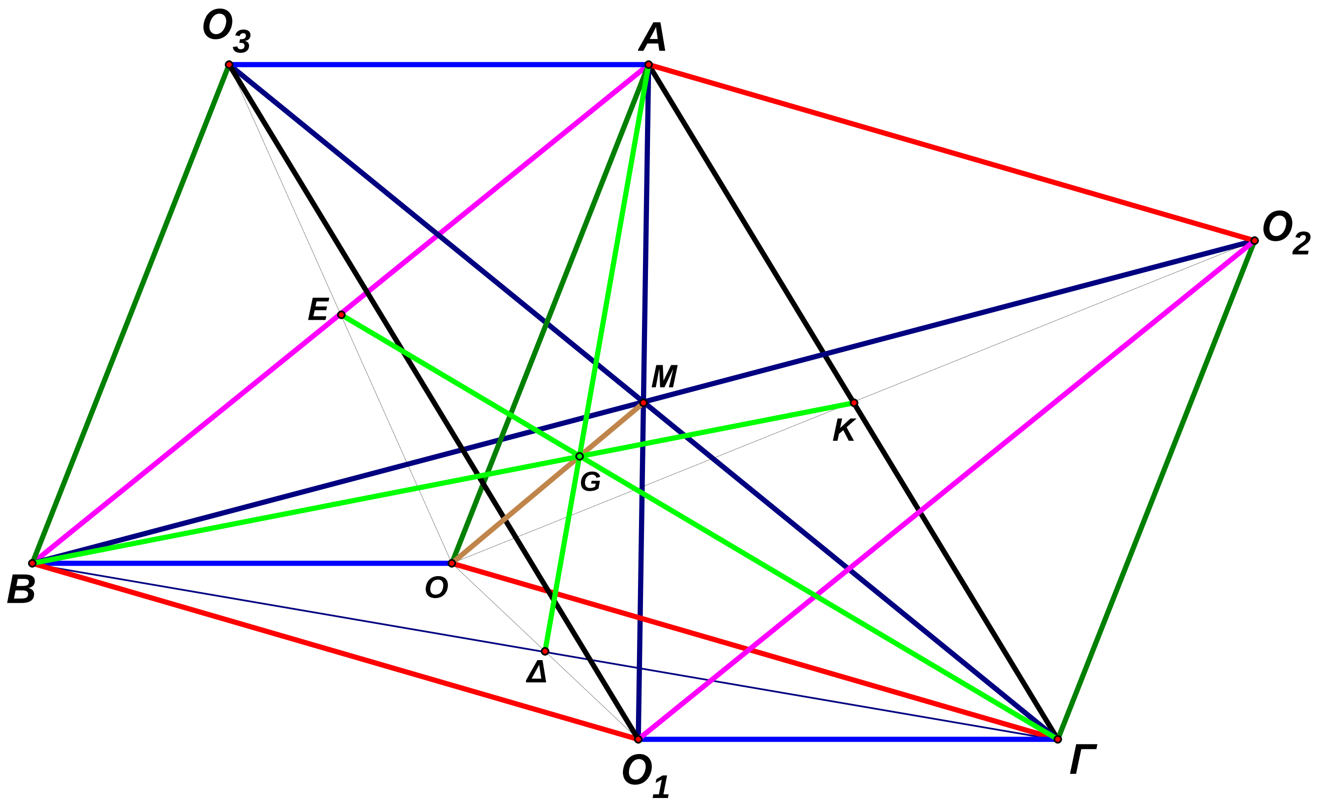
**5.** Έστω O τυχαίο εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ και $O_1$ , $O_2$ , $O_3$ , τα συμμετρικά του O ως προς τα μέσα των πλευρών ΒΓ , ΑΓ , ΑΒ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι :

a) Οι ευθείες $AO_1$ , $BO_2$ , $\Gamma O_3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, έστω Μ.

b) Οι άπειρες ευθείες ΟΜ διέρχονται από σταθερό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ.

*Προτεινόμενη Λύση*

***(Σχολή Υπομηχανικών 1960)***




**a)** Επειδή το σημείο Δ είναι κοινό μέσο των τμημάτων ΒΓ , $OO_1$ , το τετράπλευρο $BO\Gamma O_1$ θα είναι παραλληλόγραμμο, άρα τα τμήματα $BO_1$ , ΓΟ θα είναι ίσα και παράλληλα. Ανάλογα , έχουμε ότι $AO_2$ , ΓΟ ίσα και παράλληλα. Έτσι, το $AO_2O_1B$ θα είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιές του $AO_1$ , $BO_2$ θα διχοτομούνται.

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε ότι διχοτομούνται τα τμήματα $\Gamma O_3$ , $AO_1$ αφού $AO_3O_1\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, λόγω των παραλληλογράμμων $AO_3BO$ , $BO\Gamma O_1$ .

Ώστε το σημείο Μ είναι κοινό μέσο των $AO_1$ , $BO_2$ , $\Gamma O_3$ .

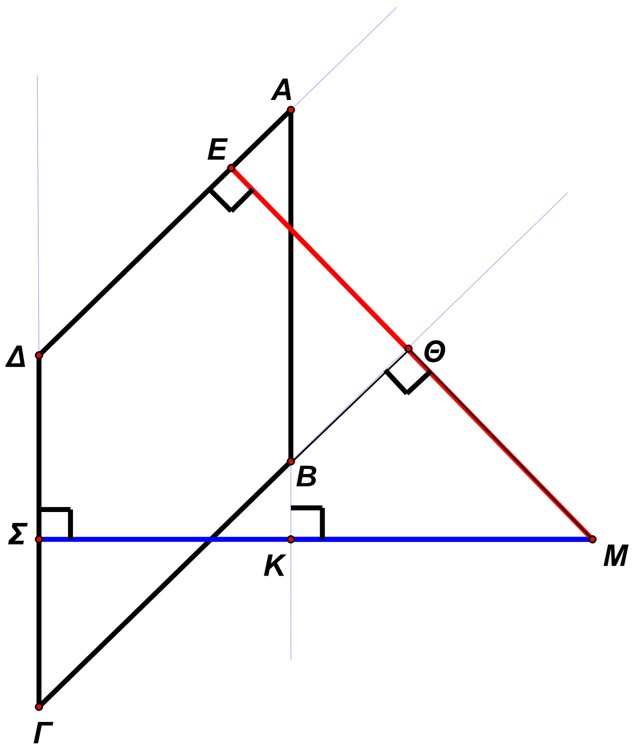
**b)** Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο $OO_3\Gamma$ οι $OM$ , $\Gamma E$ είναι διάμεσοι άρα για το σημείο στο οποίο τέμνονται έστω $G_1$ , θα έχουμε $OM = 3G_1M$ , ενώ στο τρίγωνο $OO_1A$ οι $OM$ , $A\Delta$ είναι επίσης διάμεσοι άρα για το σημείο στο οποίο τέμνονται θα έχουμε $OM = 3G_1M$ , άρα τα σημεία $G_1$ , $G_2$ ταυτίζονται.

Αυτό σημαίνει ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ , $OO_3B$ , $OO_1A$ , $OO_2B$ έχουν κοινό βαρύκεντρο, από το οποίο και διέρχονται όλες οι άπειρες ευθείες $OM$.

**6**. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Μ εσωτερικό της κατακορυφήν γωνίας $\mathrm{AB\Gamma}$ του ρόμβου. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων του από τις πλευρές ΓΒ και ΓΔ.

*Προτεινόμενη Λύση*

***(Δοκίμων , 1949)***




Πρέπει να δείξουμε ότι $MK + ME = M\Theta + M\Sigma$.

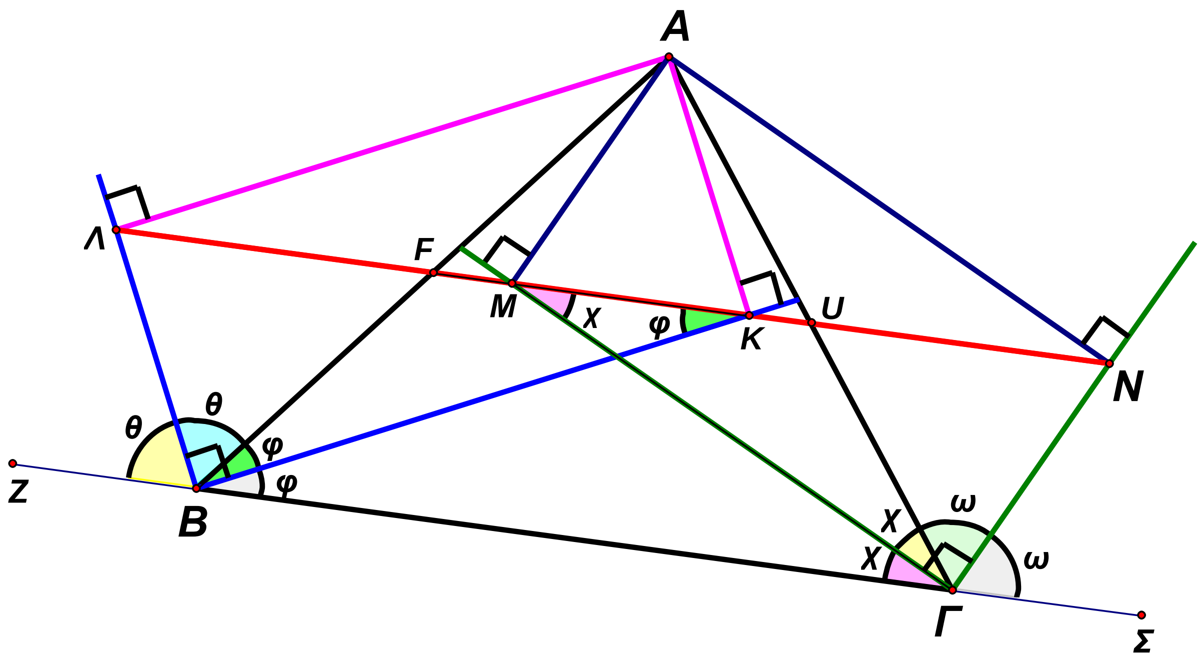
Παρατηρούμε ότι $E\Theta = \Sigma K$ ( τα ύψη του ρόμβου είναι ίσα) διότι $(AB\Gamma\Delta) = A\Delta \cdot E\Theta = \Delta\Gamma \cdot \Sigma K$ , αλλά $A\Delta = \Delta\Gamma$ .

Έτσι , $MK + ME = MK + (M\Theta + E\Theta) = M\Theta + (MK + E\Theta) =$

$= M\Theta + (MK + \Sigma K) = M\Theta + M\Sigma$.

**7.** Έστω K και Λ οι προβολές της κορυφής A τριγώνου ABΓ επί της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας B αντίστοιχα, ενώ M και N οι προβολές του A επί της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Γ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι τα σημεία K , Λ , M , N είναι συνευθειακά και μάλιστα η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται είναι παράλληλη προς τη ΒΓ.

*Προτεινόμενη Λύση* **(Σχολή Εμποροπλοιάρχων – Μηχανικών 1958)**



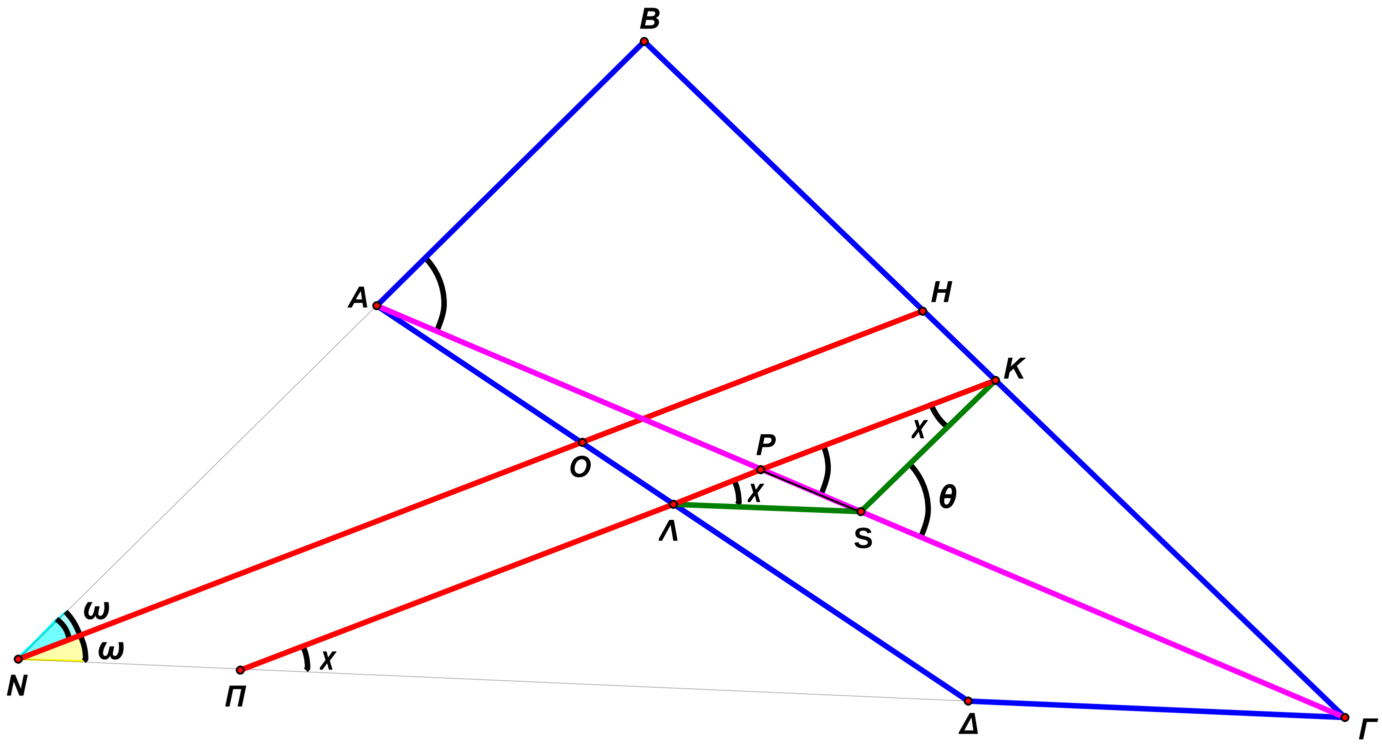

Γνωρίζουμε ότι οι διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες, άρα το AKBΛ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αφού έχει 3 ορθές γωνίες. Έτσι οι διαγώνιες του διχοτομούνται στο F και είναι και ίσες , άρα FB = FK, δηλαδή $FKB = FBK = \varphi$. Αλλά $\mathrm{ABK} = \Gamma\mathrm{BK}$ (BK εσωτερική διχοτόμος), άρα $\Gamma\mathrm{BK} = F\mathrm{KB} \Rightarrow$ FK / / ΒΓ , δηλαδή η ευθεία ΛFK είναι παράλληλη στην ΒΓ.

Εντελώς ανάλογα προκύπτει ότι η ευθεία MUN είναι παράλληλη στην ΒΓ, ενώ πρόσθετα και FU // ΒΓ .

**8.** Εάν δύο απέναντι πλευρές τετραπλεύρου είναι ίσες και μη παράλληλες, αποδείξτε ότι η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δύο άλλων πλευρών είναι παράλληλη προς την διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι δύο ίσες πλευρές.

***(Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Χημικό 1960 , Σχολή Ικάρων 1960)***

*Προτεινόμενη λύση*




Έστω S το μέσο της διαγωνίου ΑΓ. Τότε $SK \overset{//}{=} \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \overset{//}{=} S\Lambda \Rightarrow SK\Lambda = S\Lambda K = x$

Άρα $\theta = KS\Gamma = x + KPS = x + (x + PS\Lambda) = 2x + S\Gamma\Delta$

Όμως είναι και $\theta = KS\Gamma = \mathrm{B}\mathrm{A}\Gamma = 2\omega + S\Gamma\Delta$

Ώστε $2x = 2\omega \Rightarrow x = \omega \Rightarrow \Pi\Lambda\mathrm{K} // \mathrm{NH}$