ΩΡΙΑΙΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΕΠΩΝΥΜΟ: ……………………………………………………………………………… ΟΝΟΜΑ: ……………………………………………………………… ΤΜΗΜΑ: Γ΄ ΤΕΧΝ. 1

1ο ΘΕΜΑ

Α. Έστω z_0 ένας σταθερός μιγαδικός με $Re(z_0) \cdot Im(z_0) \neq 0$.

α) Ποια γραμμή παριστάνει η εξίσωση $|z - z_0| = |\overline{z_0}|$; Από ποιο σημείο διέρχεται αυτή η γραμμή; Γιατί; (Μ1)

β) Ποια γραμμή παριστάνει η εξίσωση $|z - z_0| = |z - \overline{z_0}|$; (Μ1)

Β. Αποδείξτε ότι για τυχαίους μιγαδικούς z_1 , z_2 ισχύει η ισότητα $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (Μ2)

Γ. Αποδείξτε ότι οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $\frac{1}{z}$, $\overline{z}$ είναι πάντα ομόρροπες . (Μ1)

Δ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις : (Μ2)

α) Αν $z , w \in C$ και $z^2 + w^2 = 0$ τότε $z = w = 0$

β) Αν η εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$ και $a,b,c \in R$) έχει αρνητική διακρίνουσα, τότε είναι αδύνατη στο σύνολο C.

γ) Αν οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z , w είναι αντίρροπες, τότε ισχύει $|z - w| = |z| + |w|$

δ) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων.

2ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{13}{z} = 6$ (1) με ρίζες τις z_1 , z_2 που έχουν εικόνες τα σημεία Α και Β όπου $Im(z_1) > 0$

α) Βρείτε τους z_1 , z_2 (Μ2)

β) Υπολογίστε τον αριθμό $k = \left(\frac{z_1 - 1}{2}\right)^{2012} + \left(\frac{z_2 - 1}{2}\right)^{2012}$ (Μ2)

γ) Ονομάζουμε C_1 τον κύκλο με διάμετρο ΑΒ και w τους μιγαδικούς των οποίων οι εικόνες βρίσκονται πάνω στον C_1.

γ1) Αποδείξτε ότι ο C_1 έχει εξίσωση $|w - 3| = 2$. (Μ1)

γ2) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $Σ = |w - 3i|$ καθώς και οι αντίστοιχες τιμές των w που δίνουν στην Σ τις ακρότατες τιμές (Μ3)

γ3) Έστω w_1 , w_2 δύο μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες ανήκουν στον C_1 ώστε $|w_1 - w_2| = 4$. Υπολογίστε $|w_1 + w_2|$ (Μ2)

δ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς $f = 4w - 9$.

δ1) Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών f (Μ1)

δ2) Αποδείξτε ότι οι εικόνες των w , f απέχουν σταθερή απόσταση. (Μ2)