<u>Η πυκνότητα των ρητών και των άρρητων αριθμών</u>

Θα αποδείξουμε ότι αν α , β είναι πραγματικοί αριθμοί με α < β , τότε υπάρχει ρητός γ και άρρητος δ ώστε να είναι α < γ < β , α < δ < β .

Αρχικά θα θεωρήσουμε γνωστή την *Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών* : «Το σύνολο N των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο». Ως πόρισμα αυτής προκύπτει ότι «για κάθε πραγματικό ε > 0 , υπάρχει φυσικός n $\geq$ 1 ώστε $1/n < \varepsilon$ » .

Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα θ· N (όπου θ τυχαίος θετικός πραγματικός) δεν είναι άνω φραγμένα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι α $\geq$ 0. Σύμφωνα με τα παραπάνω , αφού β – α > 0 , υπάρχει φυσικός n $\geq$ 1 ώστε $\frac{1}{n} < \beta - \alpha$. Θεωρούμε τώρα το σύνολο $\Sigma = \left\{ k \in \mathrm{N} \,/\, \frac{k}{n} > a \right\}$. Προφανώς Σ $\neq \varnothing$, άρα θα έχει ελάχιστο στοιχείο (*αρχή της καλής διάταξης*) , έστω το k_0 . Τότε θα έχουμε $\frac{k_0 - 1}{n} \leq a < \frac{k_0}{n}$

Άρα $\frac{k_0}{n} = \frac{k_0 - 1}{n} + \frac{1}{n} < a + (\beta - \alpha) = \beta$. Ώστε $a < \frac{k}{n} < \beta$ και φυσικά $\gamma = \frac{k}{n}$ ρητός.

Στην περίπτωση που ήταν α < 0, θα υπήρχε ένας φυσικός m ώστε 0 < m + α < m + β , οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη διαδικασία θα βρίσκαμε ρητό ρ ώστε m + α < ρ < m + β $\Rightarrow$ α < ρ – m < β και ο ζητούμενος ρητός θα ήταν ο ρ – m .

Θεωρούμε τώρα τους πραγματικούς $\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$. Από τα παραπάνω υπάρχει ρητός γ ώστε

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < \gamma < \frac{\beta}{\sqrt{2}} .$$

Αλλά τότε $\alpha < \gamma\sqrt{2} < \beta$ και δ = $\gamma\sqrt{2}$ = άρρητος , άρα το σύνολο R είναι πυκνό και στους άρρητους.