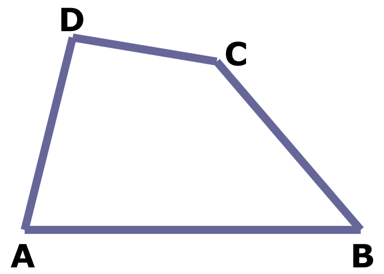
Ένα ... «περίεργο» τετράπλευρο (εργασία που δημοσιεύτκε στο περιοδικό «Φ», τεύχος 4ο)

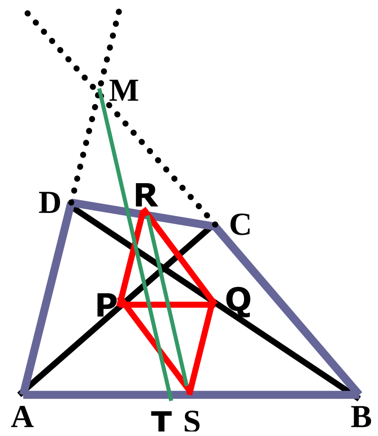


Το διπλανό κυρτό τετράπλευρο θα ονομάζεται «ισοσταθμισμένο» αν ισχύουν AD = BC και $\hat{A}+\hat{B}=120^0$.
Ας δούμε κάποιες ιδιότητες του .

Ιδιότητες

(1) Τα μέσα P , Q , R των διαγωνίων και της πλευράς CD αποτελούν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου .

Απόδειξη



$PR \overset{//}{=} \dfrac{AD}{2}$, $QR \overset{//}{=} \dfrac{BC}{2}$ οπότε PR = QR . Αλλά

$\hat{M} = 60^0$ (καθώς AD , BC τέμνονται αφού $\hat{A}+\hat{B}=120^0$)

και $\hat{M} = P\hat{R}Q$ (οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες)

(2) Αν S το μέσο της AB τότε το PQSR είναι ρόμβος

Απόδειξη

$$PS \overset{//}{=} \frac{BC}{2} = RQ = RP \overset{//}{=} \frac{AD}{2} = QS$$

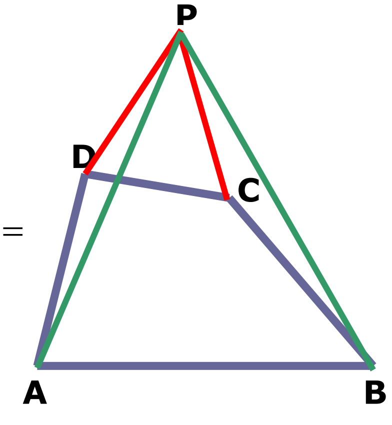
(3) Η RS είναι παράλληλη στη διχοτόμο MT της γωνίας M .

Απόδειξη

$$M\hat{T}B = B\hat{A}D + A\hat{M}T = Q\hat{S}B + 30^0 = Q\hat{S}B + R\hat{S}Q = R\hat{S}B$$

(4) Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο DPC εξωτερικά του τετραπλεύρου. Τότε το τρίγωνο PAB είναι επίσης ισόπλευρο .

Απόδειξη



Τα τρίγωνα ADP , PDC έχουν DP = PC , AD = CB

$$\underline{P\hat{C}B} = 360^0 - (60^0 + D\hat{C}B) = 300^0 - D\hat{C}B = 60^0 + (240^0 - D\hat{C}B) =$$

$$= 60^0 + A\hat{D}C = \underline{A\hat{D}P} \quad \text{αφού} \quad D\hat{C}B + A\hat{D}C = 360^0 - 120^0 = 240^0$$

Έτσι τα παραπάνω τρίγωνα είναι ίσα , οπότε PA = PB

και $D\hat{P}A = C\hat{P}B$ οπότε $A\hat{P}B = D\hat{P}C = 60^0$.

Ώστε APB ισόπλευρο τρίγωνο .

(5) Εξωτερικά του τετραπλεύρου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ACP , DCQ , DBR . Τότε τα σημεία P , Q , R είναι συνευθειακά .

<u>Απόδειξη</u>

Σύμφωνα με την $2^η$ ιδιότητα το τρίγωνο AQB είναι ισόπλευρο .

Παρατηρούμε ότι με στροφή +60° το $\overrightarrow{AC}$ μεταφέρεται στο $\overrightarrow{AP}$, το $\overrightarrow{AB}$ στο $\overrightarrow{AQ}$ οπότε το τρίγωνο ACB στο APQ .

Έτσι PQ = CB .

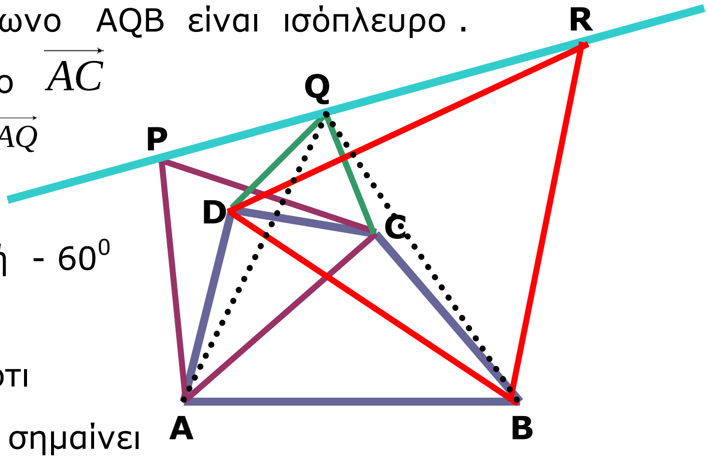
Ανάλογα το τρίγωνο ADB με στροφή - 60^0 μεταφέρεται στο BQR .

Έτσι QR = AD . Οπότε PQ = QR .

Από τα παραπάνω όμως προκύπτει ότι

$A\hat{B}C = P\hat{Q}A$ και $B\hat{A}D = B\hat{Q}R$. Αυτό σημαίνει

$P\hat{Q}A + B\hat{Q}R = 120^0$ οπότε $P\hat{Q}R = 120^0 + 60^0 = 180^0$.



<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

Έστω A(α , β) B(γ , δ) Γ(ε , ζ) Δ(θ , η)

Επειδή το $\overrightarrow{AB}$ με στροφή +60^0 μεταφέρεται στο $\overrightarrow{AQ}$ θα έχουμε :

$$\begin{pmatrix} x_Q - a \\ \psi_Q - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu 60^0 & -\eta\mu 60^0 \\ \eta\mu 60^0 & \sigma\upsilon\nu 60^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma - \alpha \\ \delta - \beta \end{pmatrix} \Rightarrow Q\left(\frac{\gamma + \alpha - \sqrt{3}(\delta - \beta)}{2}, \frac{\delta + \beta + \sqrt{3}(\gamma - \alpha)}{2} \right)$$

Ανάλογα βρίσκουμε $P\left(\frac{\varepsilon + \alpha - \sqrt{3}(\zeta - \beta)}{2}, \frac{\zeta + \beta + \sqrt{3}(\varepsilon - \alpha)}{2} \right)$ και

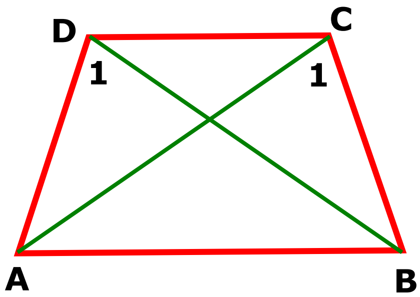
$R\left(\frac{\theta + \gamma + \sqrt{3}(\eta - \delta)}{2}, \frac{\eta + \delta - \sqrt{3}(\theta - \gamma)}{2} \right)$ καθώς το $\overrightarrow{BD}$ με στροφή - 60^0 μεταφέρεται στο $\overrightarrow{BR}$.

Επίσης $\overrightarrow{DC} \xrightarrow{+60^0} \overrightarrow{DQ}$ οπότε $Q\left(\frac{\varepsilon + \theta - \sqrt{3}(\zeta - \eta)}{2}, \frac{\zeta + \eta + \sqrt{3}(\varepsilon - \theta)}{2} \right)$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR}$. (Q μέσο PR)

(6) Τι συμβαίνει αν στο «ισοσταθμισμένο» τετράπλευρο ισχύει $\hat{A} = \hat{B} = 60^0$;

<u>Απάντηση</u>



Από την ισότητα των τριγώνων ABD , ABC (AD=BC , AB κοινή , $D\hat{A}B = A\hat{B}C$) προκύπτει $\hat{D}_1 = \hat{C}_1$ που σημαίνει ότι ABCD εγγράψιμο , άρα $AD = BC$ (καθώς AD = BC) .

Οπότε $A\hat{C}D = C\hat{A}B \Rightarrow$ CD // AB .

Έτσι ABCD ισοσκελές τραπέζιο .

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε (με ανάλογη εργασία) ότι ισχύουν και οι παρακάτω ιδιότητες :

(5) Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ADM , DCK εξωτερικά του ABCD και ισόπλευρο τρίγωνο BCR εσωτερικά του ABCD . Τότε MKR ισόπλευρο .

(6) Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ADM , DCK , BCR εσωτερικά του ABCD . Τότε MKR ισόπλευρο .

<u>Βιβλιογραφία</u>

1. Mathematical Gems III , Ross Honsberger (M.A.A. 1985)
2. Advanced Euclidean Geometry , R. A. Johnson (Dover , Mineola N.Y. 1960)
3. Geometric Transformations I , II I.M. YAGLOM
4. Easy as π ? O. A. IVANON