Αρχιμήδης ο Συρακούσιος

Ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας και από τους μεγαλύτερους όλων των εποχών. Λέγεται ότι υπήρξε μαθητής του Ευκλείδη, ότι ταξίδεψε στην Αίγυπτο, σπούδασε στην Αλεξάνδρεια και ξαναγύρισε στις Συρακούσες. Φαίνεται να είχε σχέσεις με την Αλεξανδρινή Σχολή της Αιγύπτου. Ειδικότερα είχε επιστημονική επαφή με τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο διευθυντή της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας αλλά και με τον διάδοχο του Ευκλείδη στην Αλεξανδρινή Σχολή, Κόνωνα τον Σάμιο.

Οι πιο σημαντικές συνεισφορές του Αρχιμήδη στα Μαθηματικά ανήκουν στον Ολοκληρωτικό Λογισμό.

Ασχολήθηκε με Θεωρήματα για τα Εμβαδά επιπέδων σχημάτων και όγκους στερεών. Προσδιόρισε το εμβαδόν τμήματος μιας παραβολής και μιας σπείρας , την επιφάνεια και τον όγκο σφαίρας, τον όγκο εκ περιστροφής 2ου βαθμού , το κέντρο βάρους επιπέδων σχημάτων και στερεών εκ περιστροφής.

Ιστορικά από πολύ παλιά είχαν γίνει προσπάθειες για την μέτρηση της γήϊνης διαμέτρου. Από παρατηρήσεις προέκυψε ότι ο λόγος της περιφερείας του κύκλου προς την διάμετρο του παραμένει σταθερός για όλους τους κύκλους. Ο σταθερός αυτός λόγος συμβολίστηκε με το γράμμα π (από τα αρχικά της λέξης περίμετρος). Ήταν γνωστό ότι το εμβαδόν του κύκλου δινόταν από τον τύπο $E=\pi_1 r^2$ για κάποια σταθερά π_1 και το μήκος της περιφέρειας από τον τύπο $S=\pi_2 d$ όπου d η διάμετρος. Εκείνος ο οποίος έδωσε την πρώτη αυστηρή απόδειξη ότι $\pi_1=\pi_2$ ήταν ο Αρχιμήδης στο έργο του «κύκλου μέτρησις».

Το έργο του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις»

Η πρώτη ολοκληρωμένη μελέτη για την μέτρηση του κύκλου που έχει διασωθεί ως τις μέρες μας, είναι η μικρή πραγματεία του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις» στην οποία υπάρχουν οι αποδείξεις των εξής θεωρημάτων:

1) Κάθε κύκλος είναι ισοδύναμος προς ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετη πλευρά ισούται με την ακτίνα και η άλλη με την περίμετρο του κύκλου. $E=\frac{1}{2}R\cdot L=\pi R^2\ (L=2\pi R)$

2) Ο λόγος των εμβαδών ενός κύκλου προς το τετράγωνο που έχει πλευρά την διάμετρο, είναι ίδιος με το λόγο του 11 προς το 14. $\frac{E}{(2R)^2}=\frac{11}{14}\Leftrightarrow E=\frac{11}{14}(2R)^2 \quad ή \quad E=\frac{\pi}{4}(2R)^2 \quad \left(\pi=3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}\right)$

3) Η περίμετρος κάθε κύκλου είναι μικρότερη από το τριπλάσιο και το ένα έβδομο της διαμέτρου και μεγαλύτερη από το τριπλάσιο και δέκα εβδομηκοστά πρώτα αυτής. $3\frac{10}{71}\cdot 2R<L<3\frac{1}{7}\cdot 2R\Leftrightarrow 3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$

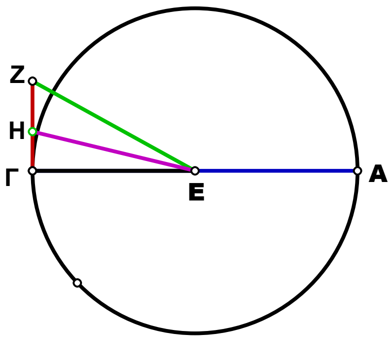
Η απόδειξη του 3ου Θεωρήματος η οποία παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον μας αποκαλύπτει ότι στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά υπήρχε και μια ισχυρή παράδοση στην εκτέλεση πολύπλοκων μαθηματικών υπολογισμών.

Η απόδειξη του 3[ου] Θεωρήματος η οποία παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον , μας αποκαλύπτει ότι στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά υπήρχε και μια ισχυρή παράδοση στην εκτέλεση πολύπλοκων μαθηματικών υπολογισμών.

Ο Αρχιμήδης για να προσδιορίσει την σχέση ανάμεσα στην περίμετρο και την διάμετρο του κύκλου(δηλαδή την τιμή του π), χρησιμοποιεί περιγεγραμμένα και εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα με 6,12,24,48,96 πλευρές , υπολογίζοντας διαδοχικά το λόγο της πλευράς κάθε πολυγώνου προς την διάμετρο.

Η όλη διαδικασία χωρίζεται σε δύο μέρη και μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά ως εξής:

α) Περιγεγραμμένα πολύγωνα



Έστω Ε το κέντρο του κύκλου και ΓΑ μια διάμετρος. Αν ΓΖ είναι το μισό της πλευράς του περιγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου, τότε $\Gamma\hat{E}Z = 30^0$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΖ ισχύει $\frac{EZ}{\Gamma Z} = 2$. Άρα $\frac{E\Gamma^2}{\Gamma Z^2} = \frac{EZ^2 - \Gamma Z^2}{\Gamma Z^2} = \left(\frac{EZ}{\Gamma Z}\right)^2 - 1 = 3$. Ο Αρχιμήδης για τον άρρητο λόγο της ακτίνας προς την μισή πλευρά του εξαγώνου θέτει $\frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{265}{153}$

δηλαδή χρησιμοποιεί με άλλα λόγια για την $\sqrt{3}$ τη προσέγγιση με έλλειψη $\frac{265}{153} = 1,732026....$ η οποία συμπίπτει σε 4 δεκαδικά ψηφία με την αληθινή τιμή της ρίζας.

Αν τώρα ΕΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{E}Z$, τότε το ΓΗ είναι το μισό της πλευράς του περιγεγραμμένου κανονικού δωδεκαγώνου. Σύμφωνα με το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου είναι

$$\frac{E\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma H}{ZH} \Leftrightarrow \frac{E\Gamma}{E\Gamma + EZ} = \frac{\Gamma H}{\Gamma H + HZ} \Leftrightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{E\Gamma + EZ}{\Gamma Z} = \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} + \frac{EZ}{\Gamma Z} = \frac{265}{153} + 2 = \frac{571}{153}$$

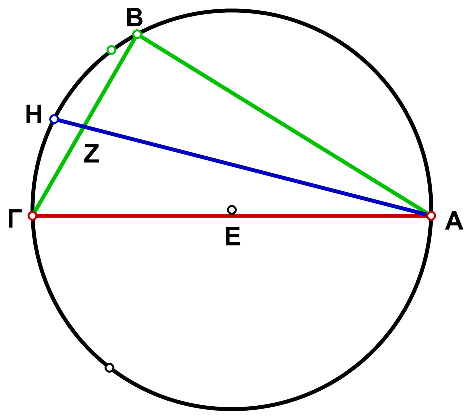
. Δηλαδή έχουμε μια ρητή προσέγγιση του λόγου της ακτίνας προς το μισό της πλευράς του περιγεγραμμένου κανονικού δωδεκαγώνου, που είναι φυσικά ίδιος με το λόγο της διαμέτρου προς την πλευρά.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και ύστερα από 3 ακόμη διχοτομήσεις, ο Αρχιμήδης βρίσκει ότι ο λόγος της διαμέτρου του κύκλου προς την πλευρά του περιγεγραμμένου κανονικού 96-γώνου είναι $\frac{4673(1/2)}{153}$.

Άρα ο λόγος της διαμέτρου προς την περίμετρο του 96-γώνου θα είναι $\frac{4673(1/2)}{96 \cdot 153} = \frac{4673(1/2)}{14688}$ και ο λόγος της περιμέτρου του 96-γώνου προς την διάμετρο του κύκλου είναι $3\frac{667(1/2)}{4673(1/2)}$.

Επειδή όμως (γράφει ο Αρχιμήδης) ο λόγος $\dfrac{667(1/2)}{4673(1/2)}$ είναι μικρότερος του $\dfrac{1}{7}$, συμπεραίνουμε ότι η περίμετρος του περιγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού 96-γώνου είναι μικρότερη από το $3\dfrac{1}{7}$ της διαμέτρου. Έτσι πολύ περισσότερο και η περίμετρος του κύκλου θα είναι μικρότερη από το $3\dfrac{1}{7}\left(=\dfrac{22}{7}\right)$ της διαμέτρου.

β) Εγγεγραμμένα πολύγωνα



Αν ΓΒ είναι η πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου, τότε $\Gamma\hat{A}B = 30^0$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma B} = 2$.

Έτσι $\dfrac{AB^2}{\Gamma B^2} = \dfrac{A\Gamma^2 - \Gamma B^2}{\Gamma B^2} = \left(\dfrac{A\Gamma}{\Gamma B}\right)^2 - 1 = 3$.

Ο Αρχιμήδης θέτει τώρα $\dfrac{AB}{\Gamma B} = \dfrac{1351}{780} = 1{,}732051....$ δηλαδή χρησιμοποιεί για την $\sqrt{3}$ τη προσέγγιση με υπεροχή, η οποία συμπίπτει σε 5 δεκαδικά ψηφία με την αληθινή τιμή της ρίζας.

Αν τώρα η διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}B$ τέμνει την ΓΒ στο Ζ και τον κύκλο στο Η, τότε το ΓΗ είναι η πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού δωδεκαγώνου και σύμφωνα με το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{\Gamma Z}{BZ} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{A\Gamma + AB} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma Z + BZ} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{A\Gamma + AB}{\Gamma B} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B} + \frac{AB}{\Gamma B} = 2 + \frac{1351}{780} = \frac{2911}{780}$$

Όμως $\overset{\triangle}{A H \Gamma} \sim \overset{\triangle}{\Gamma H Z}$ διότι $\hat{H}$ κοινή και $H\hat{\Gamma}Z = \Gamma\hat{A}H = \dfrac{\Gamma B}{2}$.

Οπότε $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma Z} = \dfrac{\Gamma H}{HZ} = \dfrac{AH}{\Gamma H} \Rightarrow \dfrac{AH}{\Gamma H} = \dfrac{2911}{780}$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $\dfrac{A\Gamma^2}{H\Gamma^2} = \dfrac{AH^2 + \Gamma H^2}{\Gamma H^2} = \left(\dfrac{AH}{\Gamma H}\right)^2 + 1 = \left(\dfrac{2911}{780}\right)^2 + 1 = \dfrac{9082321}{608400}$

Στο σημείο αυτό ο Αρχιμήδης θέτει $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{H\Gamma}} = \frac{3013(3/4)}{780}$ δηλαδή χρησιμοποιεί για την $\sqrt{9082321}$ την προσέγγιση με υπεροχή $3013\frac{3}{4} = 3013,75$ ενώ η αληθινή τιμή της ρίζας είναι 3013,6889.....

Η τελευταία ισότητα είναι μια ρητή προσέγγιση του λόγου της διαμέτρου του κύκλου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού 12 – γώνου.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο ο Αρχιμήδης βρίσκει τελικά ότι ο λόγος της διαμέτρου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού 96 – γώνου είναι $\frac{2017(1/4)}{66}$.

Άρα ο λόγος της διαμέτρου προς την περίμετρο του 96 – γώνου θα είναι $\frac{2017(1/4)}{6336}$.

Άρα ο λόγος της περιμέτρου του 96 – γώνου προς την διάμετρο θα είναι $\frac{6336}{2017(1/4)}$.

Επειδή όμως ο τελευταίος λόγος είναι μεγαλύτερος του $3\frac{10}{71}$ συμπεραίνουμε ότι $\Pi_{96} > 3\frac{10}{71}\cdot\delta$

Έτσι , πολύ περισσότερο και η περίμετρος του κύκλου θα είναι μεγαλύτερη από τα $3\frac{10}{71}(=\frac{223}{71})$ της διαμέτρου.

Τελικά , έχουμε (με σύγχρονο συμβολισμό) $\boxed{3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}}$.

Υπάρχουν διάφορες εικασίες για τη διαδικασία με την οποία ο Αρχιμήδης κατέληξε στις προσεγγίσεις $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$.

Κατά τον Heath (Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών) από εικασία των ιστορικών Hunrath & Hultsch , ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τη διπλή ανισότητα $a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$ όπου a^2 είναι ο πλησιέστερος τετραγωνικός αριθμός μεγαλύτερος ή μικρότερος του $a^2 \pm b$ κατά περίπτωση.

Για a = 26 , b = -1 η παραπάνω σχέση δίνει :

$$26+\frac{-1}{52}>\sqrt{26^2+(-1)}>26+\frac{-1}{2\cdot 26-1} \Rightarrow \frac{1351}{52}>15\sqrt{3}>\frac{1325}{51}$$ οπότε

$$\frac{1351}{52\cdot 15}>\sqrt{3}>\frac{1325:5}{51\cdot 3} \Leftrightarrow \mathbf{\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{265}{153}}$$

Ο Δανός Αστρονόμος T. N. Thiele το 1884 έδωσε τη δική του ερμηνεία για την επιλογή των φραγμάτων $\frac{265}{153},\frac{1351}{780}$. Από την διπλή ανισότητα $0<\sqrt{3}-\frac{5}{3}<1$ πήρε την $5-3\sqrt{3}<0$ και υπολογίζοντας τις διαδοχικές δυνάμεις της κατέληξε στη συγκλίνουσα ακολουθία ρητών προσεγγίσεων του $\sqrt{3}$:

$\frac{5}{3},\frac{26}{15},\frac{265}{153},\frac{1351}{780},\ldots\ldots$ της οποίας οι όροι είναι εναλλάξ προσεγγίσεις κατ΄ έλλειψη και υπεροχή της $\sqrt{3}$.

π.χ. $5-3\sqrt{3}<0 \Rightarrow \sqrt{3}>\frac{5}{3}$

$$\left(5-3\sqrt{3}\right)^2=2(26-15\sqrt{3})>0 \Rightarrow \sqrt{3}<\frac{26}{15}$$

$$\left(5-3\sqrt{3}\right)^3=2(265-153\sqrt{3})>0 \Rightarrow \sqrt{3}>\frac{265}{153}$$ κ.ο.κ.

Πάντως το ανάπτυγμα της $\sqrt{3}$ σε συνεχές κλάσμα έχει τη μορφή $\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$ και η ακολουθία των αναγωγημάτων (προσεγγίσεων) είναι

$$1,2,\mathbf{\frac{5}{3}},\frac{7}{4},\frac{19}{11},\mathbf{\frac{26}{15}},\frac{71}{41},\frac{97}{56},\mathbf{\frac{265}{153}},\frac{362}{209},\frac{989}{571},\mathbf{\frac{1351}{780}},\frac{3691}{2131},\ldots\ldots$$

<u>Σημείωση</u>

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}$$

όπου $\alpha_0=[\chi]$ και αν θέσουμε $x_0 = x,\ x_1 = \dfrac{1}{x_0 - a_0}, \ldots\ldots, x_{k+1} = \dfrac{1}{x_k - a_k}$ τότε

$$a_1 = [x_1]\,, \ldots\ldots, a_k = [x_k]$$

Έτσι όσον αφορά το $\sqrt{3}$ θα έχουμε :

$$x = \sqrt{3}$$

$$a_0 = [x] = 1$$

$$x_0 = \sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$a_1 = [x_1] = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3}+1$$

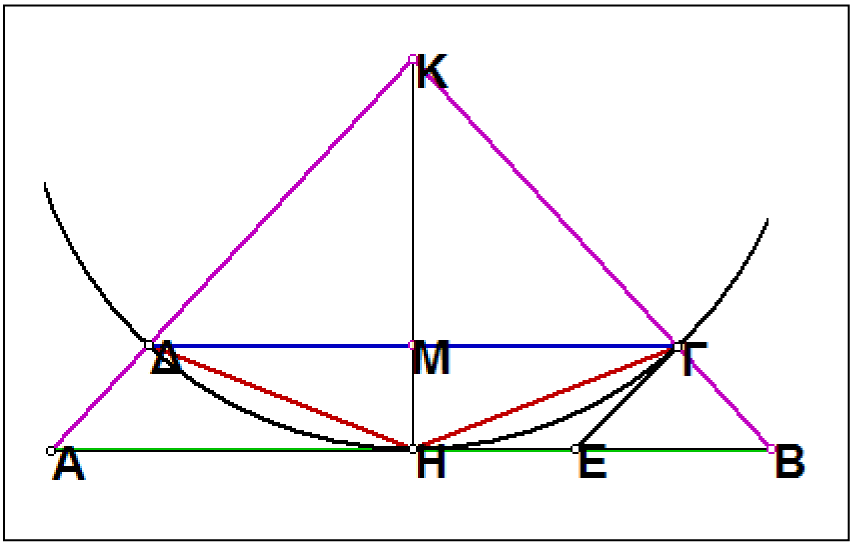
$$a_2 = [x_2] = 2$$

$$\text{Ομοίως} \qquad \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2\ldots\ldots$$

Οπότε : $\sqrt{3} = \langle 1,1,2,1,2,1,\ldots. \rangle$ και έτσι η ακολουθία των προσεγγίσεων είναι :

$$1, 1+\frac{1}{1} = 2,\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5}{3},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+1}} = \frac{7}{4}\ldots..$$

Εναλλακτική Προσέγγιση



Έστω $AB = \lambda_n$ και $\Gamma\Delta = t_n$ οι πλευρές των περιγεγραμμένων και εγγεγραμμένων κανονικών n – γώνων αντίστοιχα , Κ το κέντρο του κύκλου , Η το μέσο της ΑΒ και Μ το μέσο της ΓΔ. Στο σημείο Γ φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε. Προφανώς τότε θα έχουμε

$E H = E\Gamma = \frac{t_{2n}}{2}$ (το μισό της πλευράς του κανονικού 2n – γώνου του περιγεγραμμένου στον κύκλο)

και $H\Gamma = H\Delta = \lambda_{2n}$ (η πλευρά του κανονικού 2n – γώνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο)

$$EB = HB - HE = \frac{t_n - t_{2n}}{2}$$

$$K\overset{\vartriangle}{M}\Gamma \approx K\overset{\vartriangle}{H}B \Rightarrow \frac{M\Gamma}{HB} = \frac{KM}{KH} \Rightarrow \frac{\lambda_n/2}{t_n/2} = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{\lambda_n^2}{4}}}{R} \Rightarrow t_n = \frac{R\lambda_n}{\sqrt{R^2 - \frac{\lambda_n^2}{4}}} \quad \textbf{(1)}$$

$$E\overset{\vartriangle}{B}\Gamma \approx K\overset{\vartriangle}{H}B \Rightarrow \frac{EB}{KB} = \frac{E\Gamma}{KH} \Rightarrow \frac{\frac{t_n - t_{2n}}{2}}{\sqrt{R^2 + \frac{t_n^2}{4}}} = \frac{t_{2n}/2}{R} \Rightarrow t_{2n} = \frac{Rt_n}{R + \sqrt{R^2 + \frac{t_n^2}{4}}} \quad \textbf{(2)}$$

$$\overset{\triangle}{\mathrm{H\hat{E}\Gamma}} \approx \overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma\hat{H}\Delta}} \Rightarrow \frac{\mathrm{H\Gamma}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{H\Gamma}} \Rightarrow \lambda^2{}_{2n} = \frac{t_{2n}}{2} \cdot \lambda_n \quad \textbf{(3)}$$

Υπολογίζουμε πρώτα την ποσότητα

$$\sqrt{R^2 + \frac{t^2{}_n}{4}} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}\frac{R^2\lambda^2{}_n}{R^2 - \frac{\lambda^2{}_n}{4}}} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2\lambda^2{}_n}{4R^2 - \lambda^2{}_n}} = \frac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - \lambda^2{}_n}} \quad \textbf{(4)}$$

οπότε από **(1), (2), (4)** έχουμε:

$$t_{2n} = \frac{\dfrac{R^2\lambda_n}{\sqrt{4R^2-\lambda^2{}_n}} \Big/ 2}{R + \dfrac{2R^2}{\sqrt{4R^2-\lambda^2{}_n}}} = \frac{2R^2\lambda_n}{R\sqrt{4R^2-\lambda^2{}_n} + 2R^2} = \frac{2R\lambda_n}{\sqrt{4R^2-\lambda^2{}_n} + 2R}$$

οπότε η **(3)** γίνεται **:**

$$\lambda^2{}_{2n} = \frac{\lambda_n}{2} \cdot \frac{2R\lambda_n}{2R + \sqrt{4R^2-\lambda^2{}_n}} = \frac{R\lambda^2{}_n}{2R + \sqrt{4R^2-\lambda^2{}_n}}$$

Τελικά λοιπόν έχουμε:

Αναγωγικό τύπο για τα εγγεγραμμένα κανονικά n – γωνα

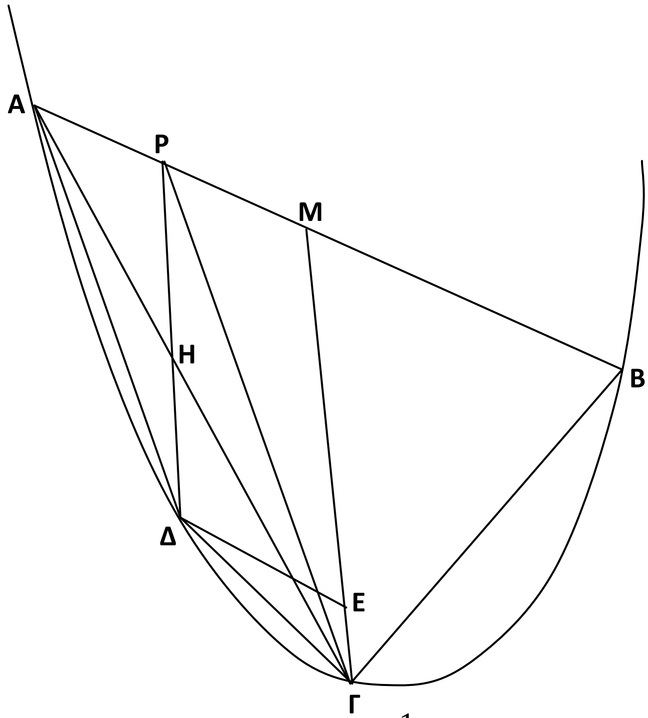
$$\boxed{\lambda^2{}_{2n} = \frac{R\lambda^2{}_n}{2R + \sqrt{4R^2-\lambda^2{}_n}}}$$

Αναγωγικό τύπο για τα περιγγεγραμμένα κανονικά n – γωνα

$$\boxed{t_{2n} = \frac{Rt_n}{R + \sqrt{R^2 + \dfrac{t^2{}_n}{4}}}}$$

Τετραγωνισμός Παραβολής

Ο Αρχιμήδης στην νεανική του εργασία «Τετραγωνισμός Παραβολής» απέδειξε ότι το εμβαδόν παραβολικού χωρίου ισούται με τα 4/3 του εμβαδού τριγώνου με βάση την χορδή της παραβολής και απέναντι κορυφή εκείνο το σημείο της παραβολής σε κατεύθυνση που είναι παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής από το μέσο της χορδής. Η ΜΓ και η ΑΒ δεν είναι απαραίτητο να είναι κάθετες.



Από το μέσο Ρ της ΑΜ φέρνουμε ΡΔ//ΜΓ.

Αν η ΔΕ είναι παράλληλη προς την ΑΒ , τότε μια ιδιότητα της παραβολής είναι ότι $\frac{\mathrm{AM}^2}{\Delta\mathrm{E}^2}=\frac{\mathrm{M\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

Αλλά προφανώς ΑΜ = 2ΔΕ. Έτσι από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε ΜΓ =4ΕΓ άρα

$\mathrm{M\Gamma}=\frac{4}{3}\mathrm{ME}=\frac{4}{3}\mathrm{P\Delta}$. Ακόμα

$$\mathrm{PH}=\frac{\mathrm{M\Gamma}}{2}=\frac{\frac{4}{3}\mathrm{P\Delta}}{2}=\frac{2}{3}\mathrm{P\Delta} \text{ και}$$

$$\mathrm{PH}=\frac{\mathrm{M\Gamma}}{2}=\frac{\mathrm{ME}+\mathrm{E\Gamma}}{2}=\frac{\mathrm{ME}+\frac{1}{3}\mathrm{ME}}{2}=\frac{2}{3}\mathrm{ME}=\frac{2}{3}\mathrm{P\Delta}=\frac{2}{3}(\mathrm{PH}+\mathrm{H\Delta}) \text{ οπότε ΡΗ=2ΗΔ}$$

Τέλος , $\left(\mathrm{A\Delta\Gamma}\right)=2(\mathrm{A\Delta H})=2\frac{1}{2}(\mathrm{APH})=\frac{(\mathrm{AP\Gamma})}{2}$. Αλλά $(\mathrm{AP\Gamma})=\frac{(\mathrm{AM\Gamma})}{2}=\frac{(\mathrm{AB\Gamma})/2}{2}=\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{4}$

οπότε τελικά $(\mathrm{A\Delta\Gamma})=\frac{1}{8}(\mathrm{AB\Gamma})$.

Ομοίως το τρίγωνο το εγγεγραμμένο στο κυκλικό τμήμα με αντίστοιχη χορδή την ΒΓ θα είναι και αυτό εμβαδού 1/8 του (ΑΒΓ). Άρα $\left(\mathrm{A\Delta\Gamma}\right)+(\mathrm{A\Delta'\Gamma})=\frac{1}{4}(\mathrm{AB\Gamma})$

Κάνοντας ανάλογη εργασία στα εναπομείναντα 4 παραβολικά κυκλικά τμήματα , μπορούμε να εγγράψουμε ένα τρίγωνο (κάθε φορά) που είναι ξανά εμβαδού 1/8 του μεγαλύτερου τριγώνου με το οποίο έχουν μια κοινή πλευρά, δηλαδή αθροιστικά αυτό το εμβαδό θα είναι το $\frac{1}{4^2}(\mathrm{AB\Gamma})$.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί επ ΄ αόριστον.

Έτσι αν θέσουμε Τ = (ΑΒΓ) τότε το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου θα είναι προφανώς

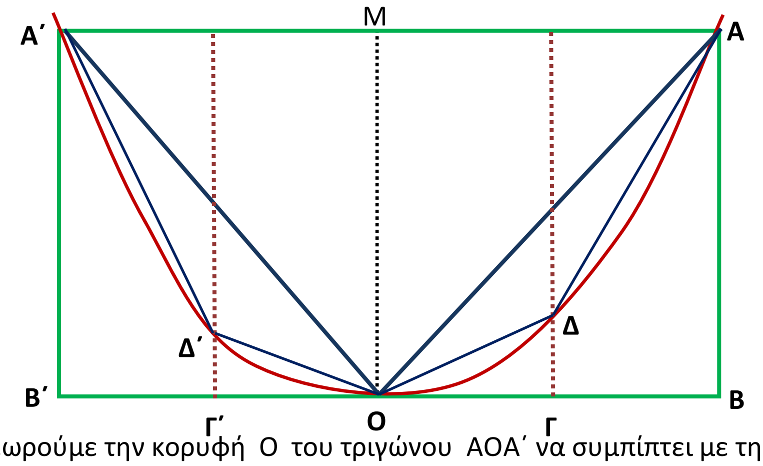
$$\mathrm{E} = \mathrm{T} + \frac{\mathrm{T}}{4} + \frac{\mathrm{T}}{4^2} + \ldots + \frac{\mathrm{T}}{4^\nu} + \ldots$$

Σήμερα γνωρίζουμε ότι αυτό το άθροισμα ισούται με 4Τ/3. Αλλά ο Αρχιμήδης δεν το γνώριζε , οπότε σκέφτηκε ως εξής:

Παρατήρησε ότι $\frac{1}{4^\nu} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^\nu} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{\nu-1}}$ οπότε

$$\underbrace{\mathrm{T} + \frac{\mathrm{T}}{4} + \ldots + \frac{\mathrm{T}}{4^\nu}}_{\Sigma_\nu} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{T}}{4^\nu} = \Sigma_{\nu-1} + \frac{\mathrm{T}}{3 \cdot 4^{\nu-1}}$$

άρα $\Sigma_\nu + \frac{\mathrm{T}}{3 \cdot 4^\nu} = \Sigma_{\nu-1} + \frac{\mathrm{T}}{3 \cdot 4^{\nu-1}} = \ldots = \Sigma_0 + \frac{\mathrm{T}}{3} = \frac{4\mathrm{T}}{3}$



Δηλαδή το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου ΑΟΑ΄ (ας το συμβολίσουμε με Ε)ισούται με τα 4/3 του εμβαδού του τριγώνου ΑΟΑ΄.

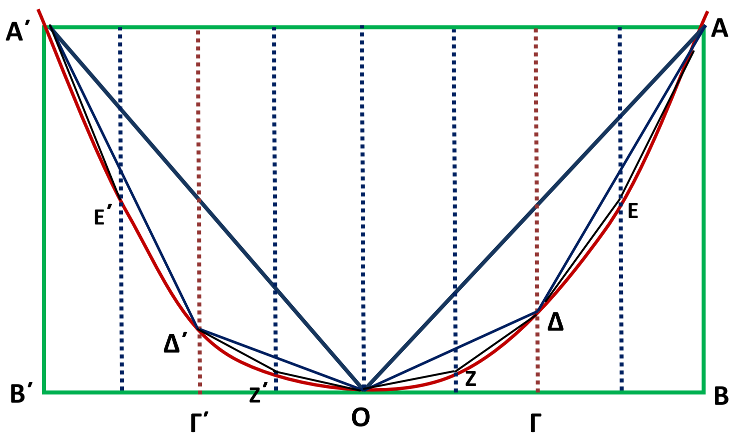
Θεωρούμε την κορυφή Ο του τριγώνου ΑΟΑ΄ να συμπίπτει με την κορυφή της παραβολής.

Από το σχήμα προκύπτει άμεσα ότι $\left(\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}'\right) > \frac{\mathrm{E}}{2}$ αφού το $\left(\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}'\right)$ είναι το εμβαδό (ΑΜΟΒ) ενώ το

Ε/2 είναι το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΟΜ.

Από τα μέσα Γ , Γ΄ των ΟΒ , ΟΒ΄ αντίστοιχα φέρνουμε παράλληλες στον άξονα της παραβολής που την τέμνουν στα σημεία Δ , Δ΄ αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε ότι $\left(\mathrm{AO}\Delta\right) + \left(\mathrm{A}'\mathrm{O}\Delta'\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{AOA}'\right)$ (εμβαδά τριγώνων)


Α΄
Α
Ε΄
Ε
Δ΄
Δ
Ζ΄
Ζ
Β΄
Β
Γ΄
Ο
Γ

–