# Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

# Θέμα: «Ακολουθία Fibonacci»

**Μάθημα: Άλγεβρα**

**Υπεύθυνος καθηγητής: κ. Σκοτίδας**

**Τάξη: Β′ Λυκείου**

**Τμήμα Β2**

**Ονοματεπώνυμο: Λαμπρινή – Μαρίνα Λάππα**

**Σχολικό έτος: 2010 – 2011**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ακολουθία **Fibonacci** πήρε το όνομά της από τον Ιταλό Μαθηματικό **Fibonacci** που αναγνωρίζεται σήμερα ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός του Μεσαίωνα. Γεννήθηκε στη δεκαετία του 1170 και πέθανε αυτή του 1240. Έφερε στην Ευρώπη το αραβικό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης καθώς και άλλες μαθηματικές καινοτομίες.

## 1. ΠΟΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΟΔΗΓΗΣΕ ΣΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ

Το πρόβλημα που ενέπνευσε τους μεταγενέστερους μαθηματικούς είναι το πρόβλημα που γέννησε την περίφημη ακολουθία Φιμπονάτσι. Στο τρίτο μέρος του liber abaci (βιβλίο των υπολογισμών) εμφανίζεται το εξής πρόβλημα:

«Κάποιος τοποθέτησε σε έναν αποκλεισμένο τόπο ένα ζευγάρι κουνέλιων. Τα κουνέλια αυτά αναπαράγονται με ρυθμό ένα νέο ζευγάρι τον μήνα και κάθε νέο ζευγάρι γίνεται γόνιμο δύο μήνες μετά κι αναπαράγεται με τον ίδιο ρυθμό. Πόσα ζευγάρια κουνελιών έχουν παραχθεί σε έναν χρόνο από το αρχικό ζεύγος».

## 2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Η ακολουθία Fibonacci είναι μια ακολουθία αριθμών που ονομάζονται αριθμοί Fibonacci. Στην ακολουθία Fibonacci κάθε αριθμός είναι ίσως με το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων. Οι όροι της ακολουθίας ορίζονται από το εξής αναδρομικό τύπο:

Fn=Fn-1+Fn-2 με $F_0=0$ και $F_1=1$

Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι:

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144

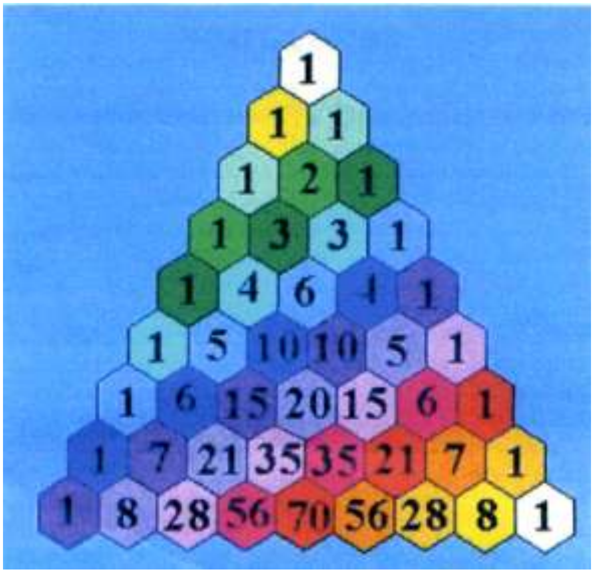
Είναι ο λόγος δυο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας τείνει προς την αποκαλούμενη ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ή ΧΡΥΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ ή ΑΡΙΘΜΟ φ.

Φ=1,618033989

Ο αντίστροφος της χρυσής τομής $\frac{1}{\Phi}=$ 0,618033989 με αποτέλεσμα να ισχύει $\frac{1}{\Phi}=\varphi-1$.

## 3. ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΜΕ ΑΛΛΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η ακολουθία αυτή έχει πολλές σημαντικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, κάθε δυο διαδοχικοί όροι είναι πρώτοι μεταξύ τους. Επίσης οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται στο τρίγωνο Pascal. Κάθε διαγώνιος έχει ένα χρώμα. Το άθροισμα κάθε μιας διαγωνίου δίνει ένα αριθμό Φιμπονάτσι.



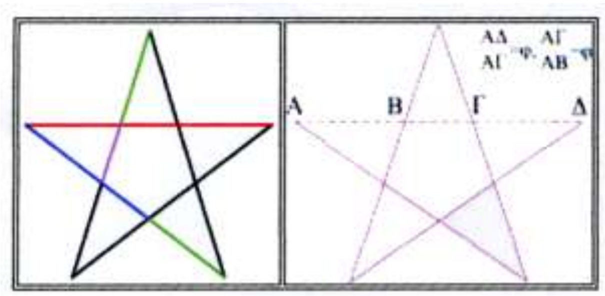
Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η απεικόνιση της ακολουθίας Fibonacci μέσω των ομώνυμων ορθογωνίων.

Επίσης το πηλίκο δύο διαδοχικών αριθμών Φιμπονάτσι τείνει στην χρυσή τομή

| | | |
|---|---|---|
| 1/1 | = | 1 |
| 2/1 | = | 2 |
| 3/2 | = | 1.5 |
| 5/3 | = | 1.666666666 |
| 8/5 | = | 1.6 |
| 13/8 | = | 1.625 |
| 21/13 | = | 1.615384615 |
| 34/21 | = | 1.619047619 |
| 55/34 | = | 1.617647059 |
| 89/55 | = | 1.618181818 |

## Η χρυσή αναλογία φ

Η χρυσή αναλογία φ=1.618…, διαδραματίζει έναν σημαντικό ρόλο στα κανονικά πεντάγωνα και πεντάγραμμα. Ο λόγος αυτός εμφανίζεται στις αναλογίες του πεντάλφα, μυστικού σήματος της Πυθαγόρειας Σχολής.




Επίσης οι αριθμοί Fibonacci εφαρμόζονται στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Ακόμα σχετίζονται με τη σταθερά Π=3,14.

## 4) ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΜΕ ΑΛΛΟΥΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΥΣ ΤΟΜΕΙΣ.

Ο Fibonacci πίστευε ότι αυτοί οι αριθμοί μπορούν να ξεκλειδώσουν τα μυστικά της Φύσης. Αυτό μπορούμε να το αντιληφθούμε αν λάβουμε υπόψη πως η ακολουθία του, καθώς και η λογαριθμική σπείρα που δημιουργείται σε σχέση με τον αριθμό Φ, απαντώνται σχεδόν παντού:

### 1. Βοτανολογία, Βιολογία:

Στην ανάπτυξη των φυτών, στο γενεαλογικό δένδρο της αρσενικής μέλισσας, σε κελύφη σαλιγκαριών, στα κέρατα του κριού, στην ανάπτυξη του ανθρώπου, στα σταυροδρόμια της βιολογίας και των μαθηματικών.

### 2. Φυσικές Επιστήμες:

Στην ατομική σχάση, στην ηλεκτρονική ανάλυση δικτύων, στον προγραμματισμό των Η/Υ, στις διακλαδώσεις των ποταμών, στα κύματα των ωκεανών, στους ανεμοστρόβιλους, στον ηλιακό σύστημα, στους γαλαξίες και άλλα.

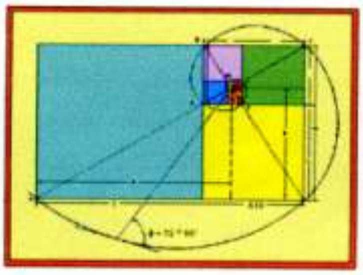
### 3. Οικονομία, Εκπαίδευση, Ποίηση, Μουσική:

Στους κύκλους των χρηματαγορών, στην εκπαίδευση μαθητών με δυσκολίες στη μάθηση, στην ανάλυση της ποίησης, σε μουσικά αριστουργήματα.

### 4. Αρχαιολογία, Αρχιτεκτονική, Τέχνη:

Στη μεγάλη Πυραμίδα του Χέοπα, στη Μινωική αρχιτεκτονική, στον Παρθενώνα της Ακρόπολης Αθηνών, σε μωσαϊκά των αρχαίων Ρωμαίων και άλλα.

# Η Λογαριθμική Σπείρα του Fibonacci



Ο Leonardo Fibonacci ήταν δικαιολογημένα η μεγαλύτερη μαθηματική ιδιοφυΐα του Μεσαίωνα.

Με το θάρρος του, με το πνεύμα συγκριτικής έρευνας και φιλομάθειας κατάφερε να ξεκλειδώσει κάποια από τα εσωτερικά μυστικά της φύσης και να φέρει ένα μέρος από το Φως της Ανατολής στη σκοτεινή και μεσαιωνική Δύση. Ήταν πραγματικά ένας πνευματικά ελκυστικός μαθηματικός που κατόρθωσε να συνδέσει τις θεωρητικές παραδόσεις των Ελλήνων και τις μαθηματικές παραδόσεις των Αράβων, εγκαθιδρύοντάς τους στην Ευρώπη. Τα γενικότερα επιτεύγματα του αναγνωρίσθηκαν – και αναγνωρίζονται χωρίς αμφισβήτηση.

# 5. ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΜΕ ΤΗ ΦΥΣΗ

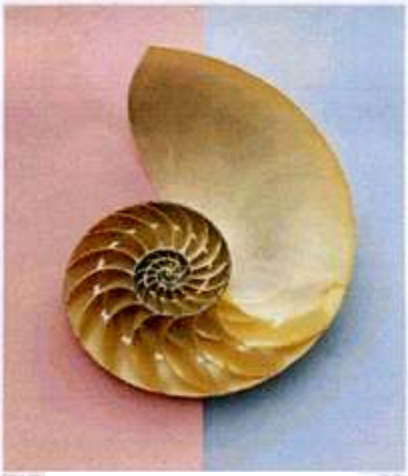
Τα φυτά δε γνωρίζουν για την ακολουθία Fibonacci, απλά μεγαλώνουν με τον πιο πρόσφορο και αποδοτικό τόπο. Όμως η ακολουθία κάνει την εμφάνισή της στη διάταξη των φύλων γύρω από το μίσχο. Εμφανίζεται επίσης στην ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτου, καθώς επίσης και στη διάταξη των πετάλων στις μαργαρίτες και ηλιοτρόπια. Μερικά κωνοφόρα δένδρα παρουσιάζουν τη σειρά αριθμών στη δομή της επιφάνειας των κορμών τους, ενώ τα φοινικόδενδρα στους δακτυλίους των κορμών τους.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το ίδιο το ανθρώπινο χέρι: κάθε άνθρωπος έχει 2 χέρια, κάθε ένα από τα οποία έχει 5 δάκτυλα, κάθε δάκτυλο αποτελείται από 3 τμήματα που χωρίζονται από 2 αρθρώσεις. Όλοι αυτοί οι αριθμοί ανήκουν στην ακολουθία Fibonacci.

Η γνώση του αριθμού φ και του χρυσού ορθογωνίου ανάγεται στους αρχαίους Έλληνες οι οποίοι βάσισαν πάνω τους το πιο γνωστό έργο τέχνης: ο Παρθενώνας είναι γεμάτος από χρυσά ορθογώνια. Οι μαθητές του μαθηματικού και φιλοσόφου Πυθαγόρα έφταναν στο σημείο να θεωρούν τη χρυσή αναλογία, θεόπνευστη.

Σκάλα Βατικανού

Κουνουπίδι



**Κοχύλι**

Αγριόκρινος
( 3 πέταλα )

Πρίμουλα
( 5 πέταλα )

## 6. ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

### Απλές γραμμικές ταυτότητες των αριθμών Fibonacci

Vn ≥ 1 ισχύει $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$

Vn ≥ 2 ισχύει $F_{n+2} + F_n + F_{n-2} = 4 \cdot F_n$

Vn e N ισχύει $F_{n+3} + F_n = 2 \cdot F_{n+2}$

Vn e N ισχύει $F_{n+3} - F_n = 2 \cdot F_{n+1}$

Vn e N ισχύει $F_{n+4} - F_n = 3 \cdot F_{n+2}$

Vn ≥ 2 ισχύει $F_{n+2} + F_{n-2} = 3 \cdot F_n$

Vn e N ισχύει $F_{n+6} - F_n = 4 \cdot F_{n+3}$

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


1. **«Οι μαγικοί αριθμοί». www. Google. gr**
2. **«Ακολουθία Fibonacci». www.Google.gr**
3. **«Fibonacci εικόνες». www.sch.gr**